



UNIVERSITÉ  
LAVAL

# Les fondements du calcul différentiel et intégral :

## Une histoire de géométrie

Travail réalisé par Amélie Compagna  
Sous la supervision de Bernard Hodgson

30 avril 2019



# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>IV</b>
<b>Remerciements</b>	<b>VI</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
L'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques . . . . .	2
<b>1 Préhistoire du calcul</b>	<b>4</b>
1.1 Euclide . . . . .	4
1.1.1 Le Livre II des Éléments d'Euclide . . . . .	5
1.1.2 Parenthèse pédagogique : La géométrie comme outil de visualisation . . . . .	7
1.2 Archimède . . . . .	8
1.2.1 La méthode d'exhaustion . . . . .	9
1.2.2 La quadrature de la parabole . . . . .	10
1.2.3 Archimède : pionnier du calcul ? . . . . .	15
<b>2 Vers le calcul différentiel et intégral</b>	<b>16</b>
2.1 Lieux géométriques et courbes mécaniques . . . . .	16
2.1.1 Problèmes de l'Antiquité . . . . .	17
2.1.2 Parenthèse pédagogique : Lieux géométriques au cégep . . . . .	19
2.2 Notation algébrique . . . . .	20
2.3 Géométrie analytique . . . . .	23
2.4 Cavalieri . . . . .	24
<b>3 Construction de tangentes</b>	<b>29</b>
3.1 Les pseudo-égalités de Fermat . . . . .	30
3.2 Composition de mouvements instantanés . . . . .	33
3.2.1 La méthode de Roberval pour les coniques . . . . .	36
3.2.2 Parenthèse pédagogique : Tracer les tangentes aux coniques . . . . .	38
3.3 Un calcul différentiel géométrique . . . . .	39
3.3.1 Méthode de construction de tangente de Descartes . . . . .	40
3.3.2 Méthode de Hudde pour trouver des racines doubles . . . . .	44
3.3.3 Recherche de maximum et de minimum . . . . .	48
3.3.4 Parenthèse pédagogique : Introduire la tangente à l'aide de Descartes . . . . .	51
<b>4 Le lien entre la tangente et l'aire sous la courbe</b>	<b>54</b>

4.1	Les mouvements uniformément difformes . . . . .	55
4.1.1	Nicole Oresme . . . . .	55
4.1.2	Galileo Galilei . . . . .	57
4.2	Lien entre logarithme et aire sous l'hyperbole . . . . .	58
4.3	Un théorème (géométrique) fondamental du calcul . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Le passage du calcul géométrique au calcul analytique</b>	<b>68</b>
5.1	Le calcul de Leibniz . . . . .	69
5.2	Le théorème fondamental du calcul de Leibniz . . . . .	71
5.3	La notation de Leibniz . . . . .	73
5.3.1	La notation différentielle de Leibniz . . . . .	74
5.3.2	Parenthèse pédagogique : La notation, un outil nécessaire à la compréhension . . . . .	76
	<b>Conclusion</b>	<b>79</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>81</b>

# Table des figures

1.1	<i>Le carré construit sur le segment <math>AD</math></i>	6
1.2	<i>Le triangle ayant même base et même hauteur que le segment de parabole</i>	10
1.3	<i>Le triangle ayant même aire que le segment de parabole et le triangle de gauche de la première couche</i>	11
1.4	<i>Le triangle ayant même aire que le segment de parabole et deux couches de triangles</i>	13
2.1	<i>Spirale d'Archimède</i>	18
2.2	<i>Cissoïde</i>	18
2.3	<i>Quadratrice</i>	19
2.4	<i>La géométrie, Descartes (Descartes, 1664, p. 80)</i>	23
2.5	<i>Méthode de Cavalieri pour calculer l'aire du parallélogramme</i>	25
2.6	<i>Détermination de l'aire sous la courbe <math>x</math></i>	26
2.7	<i>Utilisation erronée de la méthode de Cavalieri</i>	27
3.1	<i>Détermination de la sous-tangente</i>	31
3.2	<i>Cycloïde définie par le cercle <math>\Gamma</math> et le point <math>A</math></i>	34
3.3	<i>Détermination de la vitesse tangente à la cycloïde</i>	34
3.4	<i>Tracer l'ellipse à partir des foyers et de la longueur du grand axe</i>	37
3.5	<i>Composition des mouvements créant l'ellipse</i>	37
3.6	<i>Composition des mouvements créant la parabole</i>	37
3.7	<i>Intersection à droite</i>	41
3.8	<i>Intersection à gauche</i>	41
3.9	<i>Le point <math>A</math> et le point <math>P</math> sont confondus</i>	41
3.10	<i>La tangente à <math>x^2 + x + 1</math> au point <math>(1, 3)</math></i>	44
3.11	<i>Les équations de <math>f(x)</math> et de <math>M</math></i>	49
4.1	<i>Les altitudes <math>A, B, C, D</math> et <math>E</math> formant une altitude uniformément difforme</i>	56
4.2	<i>La représentation d'Oresme pour le mouvement uniformément difforme</i>	56
4.3	<i>Les rectangles inscrits et circonscrits aux intervalles <math>[a, b]</math> et <math>[ta, tb]</math></i>	58
4.4	<i>Cas <math>1 &lt; x &lt; y &lt; xy</math></i>	61
4.5	<i>Cas <math>0 &lt; x &lt; 1 &lt; xy &lt; y</math></i>	61
4.6	<i><math>L(1+h)</math>, ou <math>A_{1,1+h}</math></i>	62
4.7	<i>Le théorème de Barrow (Struik, 1969, p. 256)</i>	64
5.1	<i>Les triangles de Pascal</i>	69
5.2	<i>Les triangles de Leibniz</i>	70

5.3	<i>La figure de Leibniz (Struik, 1969, p. 283)</i>	72
5.4	<i>Un triangle caractéristique de Leibniz</i>	75

*À mes très chers parents, qui ont été mes seuls enseignants pendant si longtemps. Ma mère, ma meilleure amie, ma confidente, ma première lectrice et correctrice ; et mon père, qui m'a transmis cette soif de toujours en apprendre plus et de travailler fort.*

*À mon grand-père, à qui j'aurais tant aimé faire lire cet essai.*

# Remerciements

Lorsque j'ai pris la décision de poursuivre à la maîtrise en mathématiques, il y a un peu plus de deux ans, je ne croyais pas être rendue ici aujourd'hui. Si j'y suis arrivée, c'est grâce à de nombreuses personnes que je veux prendre la peine de remercier dans les lignes qui suivent. Toutefois, sachez que de simples mots ne sauraient exprimer toute la gratitude que je ressens pour vous qui m'avez soutenue, accompagnée, corrigée, lue et encouragée tout au long de ces deux dernières années.

Je veux premièrement remercier mon directeur de maîtrise, le professeur **Bernard Hodgson**, qui a été à mes côtés tout au long de cette aventure. Nos rencontres hebdomadaires tout au long de la rédaction de cet essai m'ont toujours rendue heureuse et motivée à continuer. Merci de m'avoir guidée à travers l'histoire des mathématiques afin que je puisse réellement choisir un sujet me passionnant au plus haut point. Merci du temps passé ensemble à discuter de mathématiques, d'histoire, d'enseignement et de philosophie. Je n'aurais jamais pu y arriver sans votre support et votre dévouement incroyable. Je n'aurais pu rêver avoir un meilleur directeur. Merci.

D'autre part, je veux remercier le département de mathématiques de l'Université Laval de m'avoir soutenue financièrement tout au long de ces années de maîtrise. Ce soutien m'a permis de me concentrer sur ma passion première, les mathématiques. Aussi, merci aux professeurs et enseignants du département qui m'ont fait confiance pour leurs dépannages en classe, corrections d'examens et au CDA. J'ai grâce à vous beaucoup appris au courant des dernières années.

Je me dois également de remercier mes parents, Marie et Pierre, qui m'ont toujours soutenue, même à des milliers de kilomètres de Québec. **Maman**, tu as toujours été là pour m'écouter parler de ma maîtrise; lorsque ça allait bien, lorsque ça allait moins bien, lorsque j'étais excitée et lorsque j'étais découragée. Toutes ces heures passées en personne, mais surtout au téléphone, par message texte et par « Facetime ». Merci d'être toujours là pour moi et d'avoir nourri cette passion que j'avais déjà pour les mathématiques lorsque nous faisons l'école à la maison. **Papa**, de ton côté, tu as toujours voulu m'expliquer les choses, me dire pourquoi et comment ça fonctionnait. Cette envie de comprendre la science a fait que je me suis trouvée à ma place au cégep, puis, à l'université. Merci à vous deux de m'avoir toujours dit que je pouvais faire tout ce que je voulais dans la vie.

À tous ceux qui sont passés dans ma vie l'espace d'une session, d'un baccalauréat, ou d'une maîtrise; je vous remercie d'avoir partagé votre passion avec moi l'espace d'un moment. J'en oublie certainement, mais je me dois d'en nommer quelques-uns. **Patrice**, mon fidèle camarade de devoirs les dimanche soirs et d'aventures. **Catherine**, ma collègue du 1069 et, disons-le nous, de potins — parce que toi, Patrice et moi on est bon là-dedans. **Amélia**, pour ces nombreux après-midis d'étude et de discussions. **Pierre-Olivier**, mon partenaire de bureau, de cours, de déjeuner et de danse. Vous avez tous marqué ces dernières années de ma vie.

Finalement, je veux prendre le temps de dire merci à ma soeur, **Anne-Marie**, ma compagne de Starbucks, fournisseuse de câlins de Golden Retrievers et complice de folies.

Les mathématiques ont toujours été pour moi une véritable passion, et avec cette maîtrise qui se termine et ma vie d'enseignante qui débute, j'espère pouvoir transmettre cette passion à de nombreux étudiants.

# Introduction

Le calcul différentiel et intégral est une branche des mathématiques qui est maintenant enseignée à tous ceux qui se dirigent vers des études scientifiques. Au cégep, les étudiants apprennent comment calculer l'aire sous une courbe, comment trouver la tangente à une courbe, la relation entre ces deux éléments et bien d'autres notions.

Ces mathématiques, qui sont de nos jours considérées comme des mathématiques élémentaires, ont déjà été des mathématiques qui n'étaient accessibles qu'aux grands mathématiciens de l'époque. L'histoire du calcul d'aires et de tangentes s'étend sur des millénaires. En 225 av. J-C., Archimède calculait des aires et des volumes à l'aide de méthodes aussi brillantes que compliquées. En 1637, Descartes utilisait des cercles et des systèmes d'équations pour calculer les pentes de tangentes à des polynômes; calculs qui devenaient très longs et ardues, plus le degré du polynôme était élevé.

Les techniques enseignées actuellement sont beaucoup plus accessibles grâce aux travaux de Newton, Leibniz, et de bien d'autres mathématiciens. Dans cet essai, on discutera plus particulièrement des mathématiques ayant précédé les travaux de Leibniz. En effet, la motivation pour le présent essai est de s'intéresser à la présence de la géométrie comme outil ayant permis de faire avancer les mathématiques. On constatera au cours de cet essai que de nombreuses choses qui sont enseignées de façon purement algébriques aujourd'hui, ont été découvertes et travaillées historiquement de façon purement géométrique. De nombreux siècles et mathématiciens ont été nécessaires afin de permettre cette transition qui est souvent aujourd'hui passée sous silence.

Effectivement, les mathématiques sont généralement enseignées de façon figée, comme si elles n'avaient pas évolué et qu'elles avaient été créées par quelques personnes hors du commun. Lorsqu'on se plonge dans l'histoire des mathématiques, on découvre que ces dernières sont loin d'être figées dans le temps et qu'elles ont été construites graduellement et ce grâce à une panoplie de mathématiciens.

## L'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques

La question de la place de l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques en est une qui a fait beaucoup parler. *L'enseignement génétique*, où la genèse mathématique est l'inspiration première du curriculum d'enseignement, est notamment l'un des sujets qui a suscité un certain nombre d'articles et de recherches. Otto Toeplitz a d'ailleurs écrit un manuel d'enseignement du calcul différentiel et intégral se basant sur cette méthode d'enseignement. (Toeplitz (2018)) Bien qu'il ne soit pas question ici de discuter en profondeur d'enseignement génétique dans le sens où l'entend Toeplitz, ce travail mettra en évidence certains points positifs que peuvent entraîner la connaissance de l'histoire lorsqu'il est question de l'enseignement des mathématiques.

Au cégep, on enseigne les notions de calcul déconnectées de la réalité historique et de l'intuition géométrique qui leur ont permis d'exister. Bien sûr, dans un cours donné, il y a une contrainte de temps et de contenu à enseigner, ce qui entraîne souvent les enseignants à se concentrer sur la matière à voir, sans ajouter de détails historiques ou contextuels.

Les mathématiques sont alors souvent vues par les étudiants comme une science plutôt inaccessible. Les enseignants leur transmettent la connaissance mathématique de façon rigoureuse et eux se contentent de l'appliquer sans se poser plus de questions. L'un des buts d'utiliser l'histoire serait de rendre les mathématiques plus accessibles, plus humaines et moins formelles. C'est ce que M.N. Fried appelle le « thème motivationnel » (Fried (2014)). Selon lui, les enseignants ont le devoir important de donner aux étudiants le goût d'apprendre les mathématiques, ce qui peut être difficile, car les mathématiques ont souvent

une connotation négative pour les étudiants. L'histoire est alors une façon de rendre cette matière plus accessible et plus intéressante.

Cette nouvelle vision des mathématiques, comme une science construite de façon dynamique à travers le temps, permet d'humaniser cette discipline pour les étudiants. De plus, cette façon de voir les choses s'inscrit davantage dans un paradigme constructiviste, à l'opposé du paradigme positiviste. Ce dernier a tendance à décourager les étudiants d'étudier les sciences, car les scientifiques y sont dépeints comme des êtres extraordinaires plutôt que comme des personnes leur ressemblant. Les mathématiques sont alors perçues comme étant impossibles à comprendre à moins d'être un génie, ce qui rend la tâche de faire apprécier cette science d'autant plus difficile pour les enseignants.

En plus de simplement motiver l'enseignement d'un certain sujet ou de le rendre plus intéressant, l'histoire peut également permettre de faire des liens entre des notions connues et des notions à enseigner. Par exemple, l'histoire illustre le lien entre la tangente à un cercle, qui est une notion vue au secondaire, et la tangente à une courbe générale, qui est une notion enseignée au cégep, comme il sera vu à la section 4. On discutera d'autres liens entre l'histoire et l'enseignement tout au long de ce travail dans les sections *parenthèses pédagogiques*.

Pour toutes ces raisons, la connaissance de l'histoire des mathématiques par les enseignants peut être très intéressante. Cet essai se veut ainsi un court résumé de l'histoire géométrique du calcul différentiel et intégral qui s'adresse principalement aux futurs enseignants de mathématiques au collégial, mais qui est également accessible à tous ceux qui s'intéressent à l'histoire, aux mathématiques, ou à leur enseignement. C'est avec cette vision que ce travail recense les grandes lignes de l'histoire du développement du calcul différentiel, à partir des Grecs anciens, jusqu'au théorème fondamental du calcul de Leibniz, en se concentrant sur la composante géométrique et sur certains aspects qui pourraient être utilisés dans l'enseignement de ces mathématiques au cégep.

# Chapitre 1

## Préhistoire du calcul

Il n'est pas facile de déterminer quand commence l'histoire du calcul différentiel et intégral. Les mathématiques existent depuis des milliers d'années, même si elles n'ont pas toujours eu la forme sous laquelle on les connaît aujourd'hui. Un choix a dû être fait quant au point de départ retenu pour ce travail et au contenu abordé tout au long de celui-ci. L'intérêt de s'intéresser au calcul différentiel et intégral de façon géométrique a dicté plusieurs décisions, notamment celle de commencer avec Euclide. De plus, les méthodes de calcul d'aire utilisées par Archimède se basant sur des principes démontrés par Euclide, il semblait naturel de s'intéresser aux *Éléments* d'Euclide, ne serait-ce que de façon succincte.

### 1.1 Euclide

Il n'y a pas de fait historique clair sur le lieu ou la date de naissance du mathématicien grec Euclide. Par les écrits de Proclus, on peut déduire qu'Euclide aurait vécu autour de 300 av. J-C. ([Heath \(1956\)](#)). Ce dernier est célèbre pour ses *Éléments*, un recueil de 13 livres portant sur les mathématiques. Ce fut un des premiers livres à être imprimé en 1482 à Venise et certainement l'un des recueils mathématiques les plus influents, avec près de mille éditions publiées. ([Boyer \(1989\)](#)) Les *Éléments* d'Euclide ont également fait partie du curriculum mathématique de nombreuses écoles, avant d'en être graduellement retiré à partir du 19e siècle. ([Fried \(2014\)](#))

### 1.1.1 Le Livre II des Éléments d'Euclide

Bien que la notation algébrique telle qu'on la connaît n'ait été inventée que beaucoup plus tard, Euclide discute tout de même de plusieurs notions pouvant être interprétées de façon algébrique dans son livre II. Ce dernier est fréquemment décrit comme portant sur l'« algèbre géométrique ». Bien évidemment, Euclide ne pensait pas à l'algèbre lorsqu'il a écrit les *Éléments*, et il ne faut pas perdre de vue le caractère géométrique du Livre II. Toutefois, il est intéressant de jeter un coup d'oeil algébrique aux différentes propositions. Par exemple, la proposition I pourrait être interprétée comme la distributivité de la multiplication sur l'addition.

**Théorème 1.1.1** (Proposition I). *Si l'on a deux droites et que l'une d'elles soit coupée en multitude quelconque de segments, le rectangle contenu par les deux droites est égal aux rectangles contenus par la droite non-segmentée et chacun des segments.* (*Vitrac, 1990, p. 327*)

Bien que cette proposition, comme plusieurs autres du livre II des Éléments, puisse être interprétées de façon algébrique, elle est définitivement une proposition géométrique. De plus, en regardant les preuves données, on réalise qu'Euclide travaillait uniquement de façon géométrique. Voici un second exemple tiré du livre II, cette fois avec une preuve qui reprend l'idée générale de celle d'Euclide.

**Théorème 1.1.2** (Proposition IV). *Si une ligne droite est coupée au hasard, le carré sur la droite entière est égal aux carrés sur les segments et deux fois le rectangle contenu par les segments.* (*Vitrac, 1990, p. 331*)

**Remarque :** On peut interpréter cette proposition comme suit : soit  $x$  et  $y$  deux nombres positifs, alors  $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ .

*Démonstration.*

Soit  $AD$  le segment dont on parle, et  $E$  un point quelconque sur ce segment. Le but est de montrer que l'aire du carré de côté  $AD$  est égale à l'aire du carré de côté  $AE$  plus l'aire du carré de côté  $ED$ , plus deux fois l'aire du rectangle de côtés  $AE$  et  $ED$ .

Construisons premièrement la [Figure 1.1](#) en traçant le carré de côté  $AD$  et la diagonale  $BD$ . Traçons ensuite une parallèle  $EI$  au côté  $AB$ . Nommons l'intersection entre  $BD$  et  $EI$   $F$ . Finalement, traçons  $HG$ , la parallèle à  $AD$  passant par  $F$ .

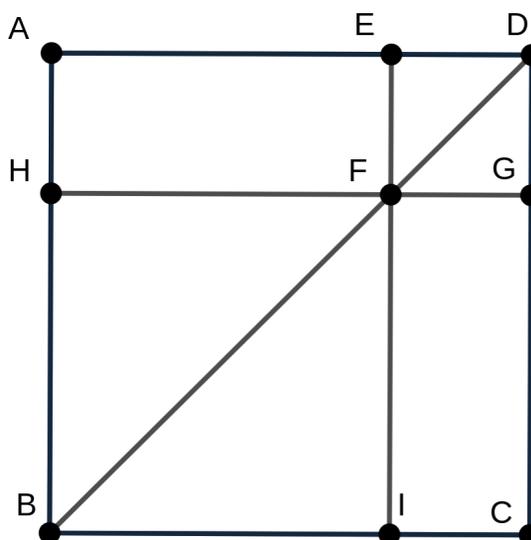


FIGURE 1.1 – Le carré construit sur le segment  $AD$

Il faut maintenant démontrer que  $EFGD$  est en effet un carré. Comme les angles  $\angle EFD$  et  $\angle ABD$  sont des angles correspondants formés par des parallèles, ils sont congruents. De plus, comme le triangle  $\triangle ABD$  est isocèle, alors  $\angle ABD \cong \angle ADB$ . Par transitivité, on a que  $\angle EFD \cong \angle EDF$ . Ce faisant, le triangle  $\triangle EFD$  est un triangle isocèle et donc  $ED \cong EF$ . Étant donné que  $EFGD$  était un parallélogramme par construction, on avait également  $ED \cong FG$  et  $EF \cong DG$ . Le quadrilatère  $EFGD$  est ainsi au moins un losange. Montrons qu'il possède 4 angles droits.

Comme  $EFGD$  est un parallélogramme, alors  $m\angle FGD + m\angle GDE = 180^\circ$ . Or, par construction,  $m\angle GDE = 90^\circ$ , car  $ABCD$  est un carré. Ainsi  $m\angle FGD = 90^\circ$  et par un raisonnement similaire, les quatre angles sont des angles droits.  $EFGD$  est donc un carré. Par le même raisonnement, on peut montrer que  $HBIF$  est aussi un carré.

Ce faisant, les rectangles  $AHFE$  et  $FICG$  sont isométriques, car  $HF \cong FI$  et  $EF \cong FG$ .

De plus, comme  $FE \cong ED$ , alors le rectangle  $AHFE$  est congruent au rectangle de côtés  $AE$  et  $ED$ , c'est-à-dire le rectangle mentionné dans l'énoncé de la proposition. Par conséquent, le carré sur  $AD$  est la somme des carrés sur  $AE$ ,  $ED$  et de deux fois le rectangle de côtés  $AE$  et  $ED$ . ■

Ce genre de preuve géométrique est typique de ce qu'on retrouve dans les premiers livres des *Éléments* d'Euclide. On remarque que ces preuves géométriques rigoureuses peuvent être très lourdes. Cette démarche, tel que mentionné plus haut, prouve l'identité  $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ ; toutefois il n'y avait pas de notation mathématique pour exprimer ce fait algébrique à cette époque.

### 1.1.2 Parenthèse pédagogique : La géométrie comme outil de visualisation

Les opinions sur l'interprétation algébrique du Livre II des *Éléments* d'Euclide sont partagées. Certains considèrent que les propositions d'Euclide servent à justifier géométriquement certaines procédures utilisées dans des calculs, alors que d'autres croient que de prêter de telles intentions aux propositions du Livre II entre en contradiction avec d'autres définitions ou propositions des livres suivants. Loin de vouloir nous lancer dans ce débat, nous invitons le lecteur qui veut en savoir plus à consulter ([Vitrac \(1990\)](#)), où est présenté une réflexion sur le sujet comportant des arguments pour et contre.

Par conséquent on ne veut pas toujours interpréter les propositions du Livre II des *Éléments* d'Euclide comme de l'algèbre, mais il pourrait être intéressant d'utiliser ce lien afin d'interpréter de façon géométrique l'algèbre élémentaire telle qu'enseignée aujourd'hui.

En effet, de nos jours, l'identité  $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$  est enseignée de façon très algébrique. Les élèves du secondaire apprennent que prendre le carré de quelque chose signifie le multiplier par lui-même. Ils apprennent également que lorsqu'ils multiplient deux binômes ensemble, ils

doivent effectuer toutes les multiplications possibles. On trouve alors,

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Toutefois, les élèves n'ont souvent aucune idée de ce que cela signifie, car ils ne comprennent pas nécessairement ce que le «  $(\cdot)^2$  » signifie. Ce faisant, de nombreuses erreurs se produisent, notamment les élèves ont tendance à écrire

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2,$$

une erreur tellement commune qu'elle possède sa propre [page Wikipédia](#). C'est une erreur qui est traînée par beaucoup d'étudiants à partir du début du secondaire, jusqu'au cégep et parfois même à l'université.

Voir l'opération d'élevation de  $x$  au carré comme la construction du carré de côté  $x$  peut être une façon géométrique de venir remédier à cette erreur. L'élève qui a une idée visuelle de ce qu'est le carré de  $x + y$ , de  $x$  et de  $y$ , aura moins tendance à oublier les deux rectangles d'aire  $xy$  qui apparaissent lors de l'élevation au carré de  $x + y$ . La [Figure 1.1](#) (sans la diagonale  $AD$ ) est alors une bonne façon de visualiser le lien entre ces différentes quantités.

## 1.2 Archimède

Né à Syracuse en 287 av. J.-C., Archimède fut l'un des plus grands mathématiciens de l'Antiquité. Ses travaux mathématiques et ses inventions l'ont rendu célèbre et connu dans le monde entier, et ce encore de nos jours. Il est mort en 212 av. J.-C. à Syracuse et a laissé derrière lui plusieurs traités mathématiques. Il s'est longuement intéressé aux calculs d'aires et de volumes, et a même insisté pour que soit gravée sur sa pierre tombale une sphère inscrite dans un cylindre, représentant le lien entre la formule de l'aire de la sphère et celle de son volume. ([Edwards, 2012](#), p. 43)

Découvrant parfois ses résultats à l'aide de la mécanique, il a toutefois prouvé rigoureusement

ce qu'il avait trouvé à l'aide de la géométrie, car pour lui une investigation mécanique n'était pas une vraie démonstration. (Ver Eecke (1960a)) La méthode géométrique qu'il a utilisée à de nombreuses reprises est une méthode rigoureuse, mais qui ne fonctionne pas pour un cas général et qui doit être recommencée à chaque fois que l'on change de figure.

### 1.2.1 La méthode d'exhaustion

La méthode utilisée par Archimède pour calculer les aires et les volumes de solides se base sur un théorème démontré par Euclide dans son Livre X. Celui-ci découle du principe dit *axiome d'Archimède*, qui est en fait attribué à Eudoxe de Cnide.

**Définition 1.2.1** (Euclide V-IV). Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement. (Peyrard, 1966, p. 113)

Des grandeurs possédant une raison entre elles font alors partie d'un corps dit archimédien, c'est-à-dire un corps satisfaisant l'axiome d'Archimède. Par exemple, les nombres réels ( $\mathbb{R}$ ) et les nombres rationnels ( $\mathbb{Q}$ ) possèdent cette propriété.

**Théorème 1.2.1** (Euclide X-I). *Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.* ((Peyrard, 1966, p. 258))

La démonstration peut être trouvée par le lecteur dans (Peyrard (1966)) et utilise l'axiome d'Archimède qui découle de la définition IV du Livre V des *Éléments* d'Euclide. En effet, les longueurs dont fait mention Euclide sont des nombres réels et possèdent donc une raison entre elles.

La méthode d'exhaustion, telle que l'appliquait Archimède, consistait à « gruger » plus de la moitié l'aire d'une certaine section à l'aide de polygones. De ce fait, après un certain nombre d'étapes l'aire restante devenait, en vertu de la proposition X-I, plus petite qu'une certaine longueur arbitraire. En langage moderne, soit  $A$  l'aire de la section que voulait calculer Archimède,  $A_i$  les aires des polygones inscrits à l'intérieur de la section voulue, et  $\varepsilon > 0$ ; alors  $\exists N > 0$  tel que  $\forall n > N$  on a  $A - A_n < \varepsilon$ .

### 1.2.2 La quadrature de la parabole

L'un des résultats les plus célèbres d'Archimède est sans doute la quadrature de la parabole. Il s'agit du sujet de son traité *La quadrature de la parabole*. Avant de parler de la proposition finale de ce traité, nous devons introduire certaines définitions et propositions nécessaires à la démonstration de la quadrature de la parabole à proprement parler.

**Définition 1.2.2.** Un *segment de parabole*, ou *segment parabolique*, est la région bornée délimitée par une droite et une parabole qui s'intersectent en deux points distincts.

**Définition 1.2.3.** La *hauteur d'un segment de parabole* est la plus grande distance perpendiculaire entre la droite et la parabole se situant à l'intérieur du segment parabolique.

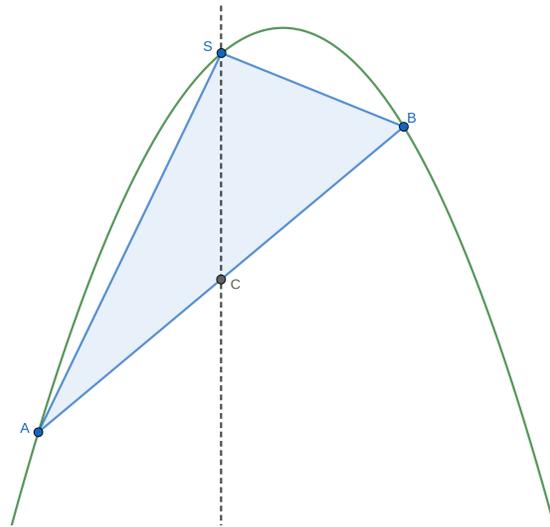


FIGURE 1.2 – Le triangle ayant même base et même hauteur que le segment de parabole

**Lemme 1.2.1** (*Quadrature de la parabole*, prop. XVIII). *Si, dans un segment délimité par une droite et par une parabole, l'on mène, du milieu de la base (point C sur la Figure 1.2), une parallèle au diamètre, le sommet du segment sera le point où la parallèle [à l'axe de la parabole] coupe la [parabole]. (point S sur la Figure 1.2). (Ver Eecke, 1960a, p. 396)*

Le lecteur voulant une preuve de ce résultat est invité à consulter (Ver Eecke, 1960a, p. 396).

**Lemme 1.2.2** (*Quadrature de la parabole*, prop. XXI). *Si dans un segment compris par une droite et par une parabole, on inscrit un triangle qui ait la même base et la même hauteur que le segment; et si dans les segments restants l'on inscrit d'autres triangles qui aient la même base et la même hauteur que ces segments, le triangle inscrit dans le segment entier est égal à huit fois chacun des autres triangles qui sont inscrits dans les segments restants.* (Ver Eecke, 1960a, p. 398)

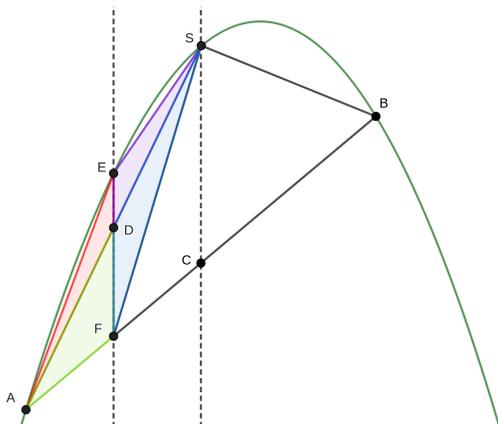


FIGURE 1.3 – Le triangle ayant même aire que le segment de parabole et le triangle de gauche de la première couche

#### Démonstration

Premièrement, on construit le triangle ayant même base et hauteur que le segment de parabole  $AES$ .

Le point  $E$  se trouve alors à l'intersection de la parallèle à  $SC$  passant par le point milieu  $D$  de  $AS$ . On voudra montrer que l'aire de ce triangle est le huitième de l'aire du triangle  $\triangle ASB$ . Premièrement, étant donné que le point  $D$  est au milieu de  $AS$ ,  $F$  est le milieu de  $AC$  par le théorème de Thalès. De même,  $DF = \frac{1}{2}SC$ . Or, par la proposition

XIX du traité sur la parabole (Ver Eecke, 1960a, p. 397),  $SC = \frac{4}{3}EF$  et donc  $DF = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}EF$ . Ce faisant, le point  $D$  est aux deux tiers de  $FE$  et donc  $DF = 2ED$ .

Comme les triangles  $\triangle AEF$  et  $\triangle ADF$  ont le même sommet, soit le sommet  $A$ , et que  $ED = \frac{1}{3}EF$ , alors leurs aires sont dans un rapport 3 : 1. Ainsi, le triangle  $\triangle AED$  (en rouge) est la moitié du triangle  $\triangle ADF$  (en vert). Par un raisonnement similaire, le triangle  $\triangle EDS$  (en mauve) est la moitié du triangle  $\triangle DFS$  (en bleu). Le triangle  $\triangle AES$  est donc la moitié du

triangle  $\triangle ASF$ . De plus, comme les triangles  $\triangle ASF$  et  $\triangle ASB$  ont la même hauteur, que  $AF = \frac{1}{2}AC$ , et que  $AC = \frac{1}{2}AB$  leurs aires sont dans un rapport 1 : 4. En remplaçant les rapports, on trouve

$$\begin{aligned} Aire(\triangle AES) &= \frac{1}{2}Aire(\triangle ASF) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}Aire(\triangle ASC) \right) \\ &= \frac{1}{2^2} \left( \frac{1}{2}Aire(\triangle ASB) \right) = \frac{1}{8}Aire(\triangle ASB). \end{aligned}$$

■

Ce lemme nous assure que lorsqu'on ajoute un triangle sur chacun des deux segments du triangle initial, l'aire se retrouve augmentée de  $\frac{1}{4}$ . Après l'ajout de ces deux triangles, l'aire de notre polygone est alors équivalente à l'aire de  $\triangle ABS + \frac{1}{4}\triangle ABS$ . Si on ajoute à nouveau des triangles sur chacun des segments de nos nouveaux triangles, on obtiendra que l'aire de notre nouveau polygone est équivalente à celle de  $\triangle ABS + \frac{1}{4}\triangle ABS + \frac{1}{4^2}\triangle ABS$ .

Il ne manque maintenant qu'une seule proposition essentielle pour faire la quadrature de la parabole.

**Lemme 1.2.3** (*Quadrature de la parabole*, prop. XXIII). *Lorsque certaines grandeurs sont établies dans une série dont la raison est quatre, la somme de toutes ces grandeurs, augmentée du tiers de la plus petite, vaudra les quatre tiers de la plus grande.* ([Ver Eecke, 1960a](#), p. 401)

*Démonstration*

Notons  $A_i$  respectivement les grandeurs qu'il mentionne. Alors en notation moderne,  $A_{i-1} = 4A_i$ . De plus, notons le tiers de la grandeur  $A_i$  par  $a_i$ .<sup>1</sup> On peut premièrement remarquer que  $A_i + a_i = \frac{1}{3}A_{i-1}$ . Examinons maintenant la somme

$$(1.1) \quad A_2 + a_2 + \dots + A_n + a_n = \frac{1}{3} (A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1}).$$

---

1. La notation et la méthode de démonstration sont tirées de ([Beaulieu et Hodgson, 2015](#), p. 24).

Or,

$$(1.2) \quad a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = \frac{1}{3}(A_2 + \dots + A_{n-1}).$$

En soustrayant (1.2) de (1.1), on trouve

$$A_2 + A_3 + \dots + A_n = \frac{1}{3}A_1$$

et donc, en additionnant  $A_1$  de chaque côté de l'égalité, on trouve le résultat recherché. ■

Ce lemme montre que si on ajoute des couches successives de triangles qui sont toujours d'aire 8 fois plus petite que l'aire du triangle sur lequel ils sont construits, alors l'aire de  $n$  couches plus le tiers de la dernière couche est égal aux quatre tiers du triangle initial. À l'aide de tous ces outils, il est maintenant possible de prouver le résultat principal du traité d'Archimède.

**Théorème 1.2.2** (*Quadrature de la parabole*, prop. XIV). *Tout segment délimité par une droite et par une parabole équivaut aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment. (Ver Eecke, 1960a, p. 402)*

*Démonstration.*

La preuve d'Archimède utilise le principe de la trichotomie. C'est-à-dire que si on a deux grandeurs  $x, y$ , alors de trois choses l'une : soit  $x < y$ ,  $x > y$  ou  $x = y$ . Il montre donc que l'aire du segment de parabole (qu'on notera  $S$ ) n'est ni plus grand ni plus petite que le  $\frac{4}{3}$  de l'aire du triangle ayant même base et même hauteur que le segment (qu'on notera  $T$ ). Par conséquent, les deux aires doivent être égales.

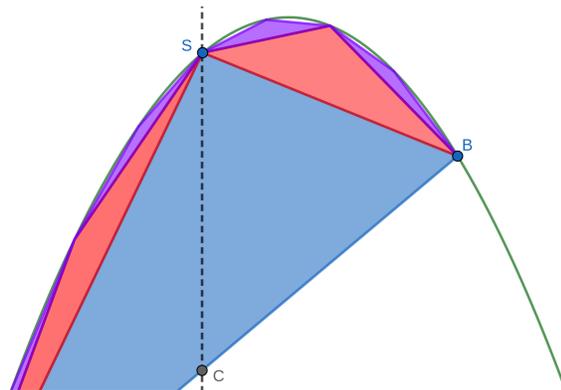


FIGURE 1.4 – *Le triangle ayant même aire que le segment de parabole et deux couches de triangles*

### Cas $T < S$

Commençons par inscrire successivement des couches de triangles dans les parties restantes du segment de parabole, comme sur la [Figure 1.4](#). Ces couches, dont l'aire sera notée  $\Delta_i$ , sont formées des triangles mentionnés au [lemme 1.2.2](#), et donc les  $\Delta_i$  ont la propriété que  $\Delta_{i+1} = \frac{1}{4}\Delta_i$ . On choisit ensuite  $n$  tel que

$$S - \sum_{i=1}^n \Delta_i < S - T.$$

Autrement dit, on vient épuiser l'aire du segment de parabole à l'aide des triangles, jusqu'à ce que l'aire restante soit plus petite que la différence entre  $S$  et  $T$ . On pourra toujours le faire, car par le [théorème 1.2.1](#), on peut être plus petit que n'importe quelle grandeur. Or, on a alors

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i > T,$$

ce qui est impossible, car peu importe le  $n$ , on a montré au [lemme 1.2.3](#) que

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i + \frac{1}{3}\Delta_n = \frac{4}{3}\Delta_1 = T.$$

### Cas $S < T$

Soit  $n$  tel que  $\Delta_n$  est plus petite que la différence entre  $T$  et  $S$ . Alors par le [lemme 1.2.3](#),

$$T - \sum_{i=1}^n \Delta_i = \frac{1}{3}\Delta_n < \Delta_n < T - S.$$

Cette suite d'inégalités implique que  $\sum_{i=1}^n \Delta_i > S$ , ce qui est impossible, car les triangles sont inscrits dans le segment de parabole et ne pourront donc jamais le dépasser en aire.

Comme  $S$  n'est ni plus grand, ni plus petit que  $T$ , alors  $S = T$  et donc l'aire du segment de parabole est égale au  $\frac{4}{3}$  de l'aire du triangle ayant même base et même hauteur que le segment de parabole. ■

### 1.2.3 Archimède : pionnier du calcul ?

Étant donné qu'Archimède est l'un des premiers à avoir obtenu plusieurs résultats sur les aires et les volumes de figures géométriques, il est parfois considéré comme le premier à avoir « fait du calcul intégral ». En effet, considérant la quadrature de la parabole, on voit que l'aire du segment de parabole considéré est l'aire entre la parabole, qu'on note  $f_1$ , et la droite, qu'on note  $f_2$ , entre leurs points d'intersections  $x_1, x_2$ . C'est-à-dire l'aire qui de nos jours se calcule à l'aide de l'intégrale suivante :

$$(1.3) \quad A = \int_{x_1}^{x_2} (f_1(x) - f_2(x)) dx.$$

De plus, il l'a fait en inscrivant des polygones qui grugeaient l'aire à calculer de plus en plus, jusqu'à être plus petit que ce qui nous intéresse. Cela est assez proche de l'idée de somme de Riemman, où on approxime l'aire sous la courbe à l'aide d'une série de rectangles de plus en plus petits et qui approximent l'aire de mieux en mieux.

Toutefois, une différence majeure entre le calcul d'Archimède et l'intégrale (1.3) est le fait que l'intégrale donne l'aire entre  $f_1$  et  $f_2$  peu importe les fonctions. Archimède, pour sa part, n'a calculé que l'aire entre une droite et une parabole en particulier.

Ainsi faut-il faire attention à la définition qu'on donne au calcul intégral à proprement dit. Il manque plusieurs éléments pour pouvoir dire qu'Archimède faisait réellement du calcul. (Edwards, 2012, p. 74) Par exemple il lui manque le concept de limite, de sorte qu'il devait alors utiliser l'argument de double réduction à l'absurde. Il lui manque aussi une idée générale pour calculer les aires, car il devait recommencer à chaque fois un calcul ingénieux en fonction de la figure géométrique considérée. Finalement, pour parler de calcul, il y a le lien inévitable qu'il faut faire entre tangente et aire sous la courbe, lien qui ne faisait pas partie des réflexions d'Archimède à l'époque.

## Chapitre 2

# Vers le calcul différentiel et intégral

Avant les années 1500, les mathématiciens n'avaient que peu de notation mathématique afin de décrire leurs différents travaux et réalisations. Les siècles qui suivirent furent très prolifiques pour ce qui est de la notation, et comme celle-ci était mieux adaptée, les mathématiques ont également pu avancer. Les courbes sur lesquelles les mathématiciens travaillaient alors ne pouvaient donc pas être définies de la même façon qu'aujourd'hui. Toutefois, cela ne veut pas dire qu'ils n'étudiaient pas des courbes, simplement qu'elles étaient définies différemment.

Ce chapitre se veut un rapide tour d'horizon de comment étaient définies les courbes avant l'invention d'une notation mathématique plus adaptée, ainsi que des changements qui ont rendu possible l'évolution des mathématiques vers le calcul différentiel et intégral. Nous terminerons en discutant de l'une des premières utilisations du concept d'indivisible, un outil essentiel — bien que peu rigoureux — au développement du calcul tel qu'on le connaît aujourd'hui.

### 2.1 Lieux géométriques et courbes mécaniques

Des siècles avant l'invention de la notation fonctionnelle telle qu'on la connaît, les mathématiciens s'intéressaient déjà à faire la quadrature de certains *lieux géométriques*. Ces derniers sont définis comme représentant l'ensemble des points ayant tous une même

caractéristique. Un exemple de lieu géométrique est le cercle, qui est le lieu de tous les points à égale distance d'un centre. Comme on l'a vu avec Archimède et la quadrature de la parabole au [précédent chapitre](#), les coniques étaient déjà des lieux géométriques connus en Grèce antique. D'autres lieux géométriques et *courbes mécaniques*, c'est-à-dire des courbes définies par des mouvements, étaient également étudiées pendant l'Antiquité.

La [cycloïde](#), qui sera étudiée au prochain chapitre, est un exemple de lieu géométrique que connaissaient déjà les mathématiciens de l'époque. Nous en examinons d'autres dans la section qui suit.

### 2.1.1 Problèmes de l'Antiquité

À l'époque, la motivation pour étudier certaines courbes particulières était souvent de résoudre des problèmes classiques de géométrie. Dans cette section, nous nous arrêterons sur trois exemples de lieux géométriques distincts des coniques. Ces exemples permettent tous de résoudre un ou plusieurs des problèmes classiques de l'Antiquité, que nous rappelons sommairement.

*En utilisant uniquement une règle non graduée et un compas,*

1. *étant donné un cube, construire un cube dont le volume est le double du premier ;*
2. *étant donné un cercle, construire un carré de même aire ;*
3. *étant donné un angle, construire un angle qui vaut le tiers du premier.*

Voici un premier exemple de courbe mécanique définie par Archimède dans son traité sur les spirales.

**Définition 2.1.1.** Si une ligne droite est menée dans un plan, et si, l'une de ses extrémités restant fixe, elle tourne un nombre quelconque de fois d'un mouvement uniforme, reprenant la position d'où elle est partie, tandis que, sur la ligne en rotation, un point se meut uniformément comme elle à partir de l'extrémité fixe, le point décrira une *spirale* dans le

plan. (Ver Eecke, 1960b, p. 261)

Cette spirale est en fait la fonction polaire  $\rho = a\theta$ , où  $a$  est une constante qui dépend des vitesses du point sur la tige et de la tige elle-même.

Cette courbe permet notamment de trisecter un angle et d'effectuer la quadrature du cercle. Toutefois, pour tracer la spirale d'Archimède on a besoin de plus que d'une règle et d'un compas, donc ce n'est pas exactement le même problème que celui qui intéressait les mathématiciens.

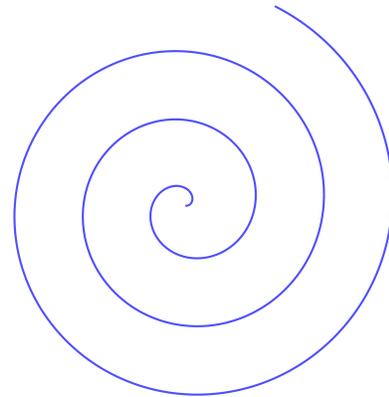
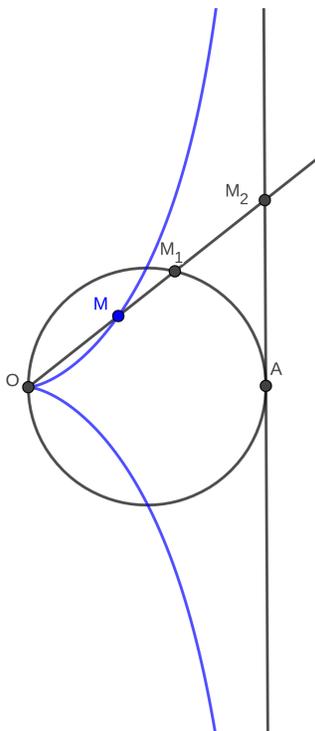


FIGURE 2.1 – Spirale d'Archimède

Voici un second exemple de lieu géométrique.

**Définition 2.1.2.** Soit un cercle  $\Gamma$ , soit  $O$  et  $A$  deux points à l'intersection du cercle et d'un de ses diamètres, et soit  $d$  la tangente au cercle en  $A$ . La *cissoïde* associée au cercle  $\Gamma$  est le lieu des points  $M$  tels que  $OM = M_1M_2$ , où  $O$ ,  $M$ ,  $M_1$  et  $M_2$  sont alignés,  $M_2$  est le point sur la tangente  $d$  et  $M_1$  le point à l'intersection de  $OM_2$  et de  $\Gamma$ .



Ce lieu géométrique, parfois appelé cissoïde de Dioclès du nom de son inventeur, un mathématicien grec du 2e siècle av. J.-C., était une courbe utilisée pour résoudre le problème de duplication du cube. Toutefois, encore une fois, il est impossible de construire la cissoïde uniquement à l'aide d'une règle et d'un compas, et donc cela ne règle toujours pas la duplication du cube dans le sens où l'entendaient les Grecs.

Voici un dernier exemple, cette fois-ci d'une courbe mécanique.

**Définition 2.1.3.** Supposons que le point  $A$  part du point  $D(0, a)$  et se déplace sur l'axe des  $y$ , vers l'origine, à une vitesse

FIGURE 2.2 – Cissoïde

constante. En même temps, supposons que le point  $B$  parte de l'intersection du quart de cercle avec l'axe des  $y$  et se déplace à vitesse constante sur le quart de cercle jusqu'au point  $C$  dans le même temps que cela prend à  $A$  pour se rendre à l'origine. Alors la *quadratrice* est le lieu des points  $M$  situés à l'intersection de la droite horizontale  $d$  passant par  $A$ , et de la droite  $OB$ .<sup>1</sup>

La quadratrice est l'une des plus vieilles courbes mécaniques connues, ayant été définie par Hippias d'Élis en Grèce vers 420av. J.-C. Celle-ci avait été utilisée par Hippias afin d'effectuer la trisection de l'angle, et servit également de nombreuses années plus tard à faire la quadrature du cercle. Toutefois, comme les deux premiers exemples, il est impossible de tracer la quadratrice uniquement avec une règle et un compas.

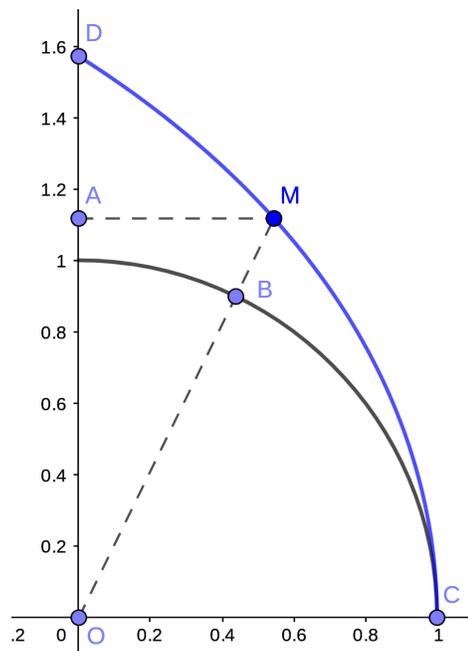


FIGURE 2.3 – Quadratrice

### 2.1.2 Parenthèse pédagogique : Lieux géométriques au cégep

De nos jours, les lieux géométriques ne sont pas du tout abordés au cégep. Pourtant, les étudiants au secondaire apprennent la définition des coniques (cercle, parabole, ellipse, hyperbole) comme lieux géométriques, tels que définis au [prochain chapitre](#). Il s'agit donc clairement d'une notion que les étudiants ont la capacité de comprendre également au cégep.

Beaucoup d'étudiants au collégial ont l'impression que les seules courbes qui existent sont celles définies par des fonctions classiques du type  $y = f(x)$ , où à chaque  $x$  du domaine, on

1. À la [Figure 2.3](#) nous avons posé  $a = \frac{\pi}{2}$  comme dans ([Edwards, 2012](#), p. 208), afin que la vitesse du point  $A$  et du point  $B$  soient les mêmes.

associe un et un seul  $y$  à l'aide de la règle  $f$  définie au préalable par une expression algébrique contenant des  $x$ . Or, il existe de nombreuses autres courbes pouvant, ou non, être décrites de façon fonctionnelle, paramétrique, ou encore géométrique, comme les courbes mentionnées à la sous-section précédente.

Les lieux géométriques sont, de plus, souvent utilisés dans les cours de mathématiques pour ingénieurs à l'université. Ces derniers ne saisissent alors pas l'idée en général d'un lieu géométrique. En effet, ces étudiants, qui n'ont été confrontés qu'à des fonctions classiques, ne comprennent pas qu'il est possible de définir une courbe comme étant le lieu des points qui satisfont à une certaine condition. Voici un exemple de question nécessitant une certaine familiarité avec le concept de lieux géométriques et dont la solution attendue est un cercle centré en  $(0,0)$  de rayon 1.

*Déterminer le lieu géométrique correspondant à l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que  $\frac{z+1}{z-1}$  est un nombre imaginaire pur. C'est-à-dire  $\frac{z+1}{z-1} = it$  pour un certain  $t \in \mathbb{R}$ .<sup>2</sup>*

Pour des étudiants qui n'ont jamais rencontré d'exemple de lieu géométrique, mis à part les coniques au secondaire, ce genre de question peut causer problème. Ainsi, la présentation au cégep de certaines courbes en tant que lieux géométriques pourrait aider les étudiants à visualiser les courbes autrement que comme des fonctions classiques de la forme  $y = f(x)$ .

## 2.2 Notation algébrique

Les 15e et 16e siècles marquent un point tournant pour les mathématiques. Tout comme la littérature, l'art, la musique et bien d'autres domaines, les mathématiques sont entraînées dans le courant de la Renaissance et cela se traduit par de rapides progrès, notamment en algèbre et dans la notation mathématique.

---

2. Tiré de l'examen 1 du cours *Mathématiques pour ingénieur I*, Université Laval, 28 septembre 2018

Au début des années 1500, l'algèbre est encore « rhétorique », pour reprendre l'expression consacrée. C'est-à-dire qu'on y exprime en mots ses problèmes et leurs solutions. Le terme algèbre correspond ici à la recherche d'inconnues et de tels problèmes sont apparus bien avant la Renaissance. En effet, on retrouve déjà en Égypte ancienne des recherches d'inconnues sur le papyrus Rhind, qui constitue l'un des plus vieux vestiges mathématiques (16<sup>e</sup> siècle av. J.-C.). (Cajori, 1928, p. 14)

Cette observation illustre bien que les mathématiciens de toutes les époques s'intéressaient à la résolution d'équations comportant des inconnues. Ils faisaient alors appel à des symboles différents afin de noter ces inconnues. Toutefois, jusqu'au 16<sup>e</sup> siècle, on ne s'intéressait qu'à la résolution d'équations particulières. Il fallait donc une nouvelle technique pour résoudre chaque nouvelle équation ; l'algèbre n'était alors qu'un « sac à trucs ». (Edwards, 2012, p. 94)

Pour passer de méthodes particulières, applicables à des équations particulières, à des méthodes générales, il fallait avoir l'idée d'une forme générale des équations et non pas travailler sur des équations en particulier.

Le mathématicien français François Viète (1540-1603) est l'un des premiers à suggérer une façon générale d'écrire les équations algébriques. Pour cela, il est impératif de distinguer les variables des constantes, ce qu'il fait à l'aide de consonnes et de voyelles.

*« That this work may be aided by a certain artifice, given magnitudes are to be distinguished from the uncertain required ones by a symbolism, uniform and always readily seen, as is possible by designating the required quantities by letter A or by other voyel letters A, I, O, V, Y and the given ones by the letters B, G, D or by other consonants. »*

Viète *In artem analyticam Isagoge* (1591). (Cajori, 1928, p. 183)

Ce fut là un pas majeur vers le calcul différentiel à proprement parler, car on faisait ainsi la transition des cas particuliers aux cas généraux. En effet, l'une des principales caractéristiques du calcul différentiel est qu'il s'applique à des fonctions générales ; cette idée de généralité n'existait pas avant Viète.

Viète utilise toutefois encore certains mots dans ses équations. Ainsi, l'expression moderne  $\frac{3BD^2 - 3BA^2}{4}$  devient, sous la plume de Viète,

$$\frac{\text{Bin } D \text{ quadratum } 3 - B \text{ in } A \text{ quadratum } 3}{4}.$$

On voit ici qu'il utilise les symboles « - » pour la soustraction ; il utilisait également « + » pour l'addition. Toutefois, les puissances et la multiplication n'ont pas encore de symboles définis.

Dans les années qui ont suivi, plusieurs mathématiciens ont adopté sa convention, notamment Pierre de Fermat (1610?-1655), que nous abordons au [prochain chapitre](#), ainsi que l'Anglais William Outghred (1575 - 1660) et le Français Albert Girard (1595-1632). ([Cajori, 1928](#), p. 158)

René Descartes (1596-1650), mathématicien, physicien et philosophe français, a pour sa part marqué l'histoire des mathématiques en introduisant dans « *La géométrie* » (1637) les fameux « *x* », « *y* », « *z* » pour les inconnues. Il utilise en effet les lettres vers la fin de l'alphabet comme inconnues et les lettres vers le début de l'alphabet comme constantes. C'est une convention d'écriture qui, bien que peu unanime au départ chez les mathématiciens de l'époque, est devenue très populaire après les années 1660 ([Cajori, 1928](#), p. 383) et a perduré jusqu'à nos jours.

On doit de plus à Descartes d'avoir introduit la notation puissance utilisée aujourd'hui. En effet, avant Descartes, les mathématiciens avaient différentes façon d'illustrer, par exemple, l'opération mettre au carré. Viète, comme on l'a vu, écrivait « *D quadratum* » ou plus simplement « *D quad.* » pour  $D^2$ , tandis que Pierre Hérigone pour sa part écrivait  $2a3$  pour  $2a^3$ , la constante venant avant l'inconnue et l'exposant après. C'est dans « *La géométrie* », que Descartes introduit la notation puissance maintenant universelle.

Il est d'ailleurs impressionnant de se plonger dans les textes originaux de Descartes. Effectivement, on y trouve une similarité surprenante avec la façon d'écrire l'algèbre aujourd'hui, similarité qui n'est pas présente du tout lorsqu'on regarde les ouvrages de Viète. Les seules différences à la Figure 2.4, où Descartes explique comment augmenter de trois la racine d'un polynôme de degré quatre, sont qu'il écrit  $yy$  plutôt que  $y^2$  et qu'il utilise le symbole  $\infty$  plutôt que l'égalité  $=$  qui, bien qu'introduit plus tôt par l'Anglais Robert Recorde (1510-1558), n'était pas encore commune en France.

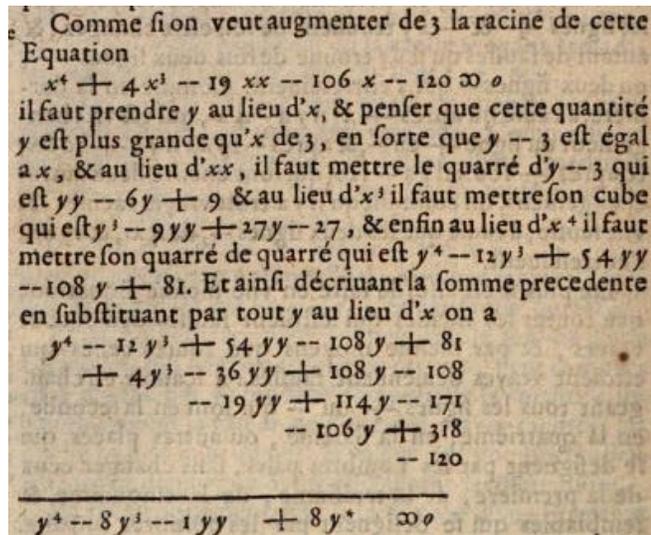


FIGURE 2.4 – *La géométrie*, Descartes (*Descartes*, 1664, p. 80)

## 2.3 Géométrie analytique

L'un des derniers aspects des mathématiques nécessaire à la création du calcul différentiel est l'idée de représenter une courbe dans un repère. Le repère qui est encore utilisé à ce jour, c'est-à-dire le plan cartésien, doit son nom à René Descartes et à ses travaux en géométrie analytique. Pierre de Fermat a de son côté également développé une telle géométrie qui, bien qu'un peu différente de celle de Descartes, abordait les mêmes concepts. Toutefois, comme elle fut publiée ultérieurement à *La géométrie* de Descartes, nous parlons toujours aujourd'hui de géométrie cartésienne.

Pour discuter réellement de géométrie analytique, deux aspects complémentaires sont nécessaires — aspects qu'on retrouve bien lorsqu'on regarde les travaux de Fermat et de Descartes.

Il y a d'une part l'idée de commencer avec une équation algébrique, puis de trouver sa représentation géométrique afin d'en déduire des propriétés. Par exemple classifier tous les polynômes de degré deux en  $x$  et  $y$  comme des coniques en fonction des valeurs des constantes. Cette façon de faire était celle qu'employait régulièrement Fermat. La possibilité de définir une nouvelle courbe à l'aide d'une équation permet également la création d'une infinité de nouvelles courbes. Avant, chaque courbe devait être définie individuellement à l'aide d'un processus mécanique ou d'une propriété précise.

Descartes, de son côté, avait plutôt comme point de départ une courbe géométrique, définie en tant que lieu géométrique ou courbe mécanique, tel que vu à la [section 2.1](#). Il trouvait ensuite l'équation  $y$  étant associée afin d'en tirer des propriétés algébriques ou encore de la résoudre pour certaines valeurs. (Edwards, 2012, p. 96)

Cette dualité était nécessaire afin de pouvoir bien étudier les différentes courbes et équations. Elle met en place les derniers fondements essentiels au développement du calcul différentiel qui s'amorce au cours des années suivantes.

## 2.4 Cavalieri

Laissons la géométrie analytique de côté pour nous intéresser brièvement à Cavalieri. Mathématicien italien qui vécut de 1598 à 1647, Bonaventura Cavalieri est surtout connu pour sa méthode des indivisibles, énoncée dans son *Traité des indivisibles*. (Ross (2007)) La définition exacte d'un indivisible est toutefois loin d'être claire et n'est mentionnée nulle part dans les travaux de Cavalieri. En général, un indivisible était pour lui un élément d'une dimension plus petite que ce qu'il voulait calculer. Par exemple, pour calculer une aire, un indivisible se trouvait à être une ligne, et pour calculer un volume, un indivisible était un plan.

**Théorème de Cavalieri** : *Si deux figures planes ont même hauteur et si des sections qui sont obtenues par des lignes parallèles aux bases et à égale distance de celles-ci sont toujours*

dans un rapport donné, alors les aires des deux figures sont aussi dans le même rapport. (Ross (2007))

Ce théorème, que Cavalieri a tenté de démontrer mais qu'il n'a jamais vraiment obtenu de façon rigoureuse, permettait alors de calculer l'aire d'une figure à partir de l'aire connue d'une autre figure.

Par exemple si on veut calculer l'aire du parallélogramme  $EFGH$ , on pourrait le comparer avec le rectangle  $ABCD$ , où les droites  $BD$  et  $AC$  sont parallèles et  $AC \cong EF$ . De plus, on a que  $A'C' \cong E'F'$ , et ce pour toute droite parallèle aux droites contenant nos deux figures. L'aire du parallélogramme est alors la même que celle du rectangle, et donc la formule pour l'aire d'un parallélogramme est également base fois hauteur.

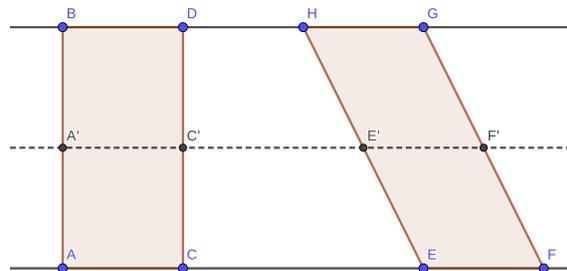


FIGURE 2.5 – Méthode de Cavalieri pour calculer l'aire du parallélogramme

Cavalieri avait un théorème similaire pour les volumes de solides, où cette fois-ci il est question de plans parallèles plutôt que de droites parallèles, et d'aire de sections plutôt que de longueurs de segments. Ce résultat pouvait être utilisé par exemple pour démontrer la formule de l'aire d'un cône, en comparant le cône avec une pyramide ayant même hauteur et où le rapport des sections d'aires parallèles aux deux plans contenant les solides était toujours le même. Le lecteur voulant en savoir plus peut consulter (Edwards, 2012, p. 105) ou (Ross (2007)).

En utilisant encore une fois les indivisibles, Cavalieri a aussi démontré, pour  $n \leq 9$ , la formule

qu'on connaît aujourd'hui comme

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

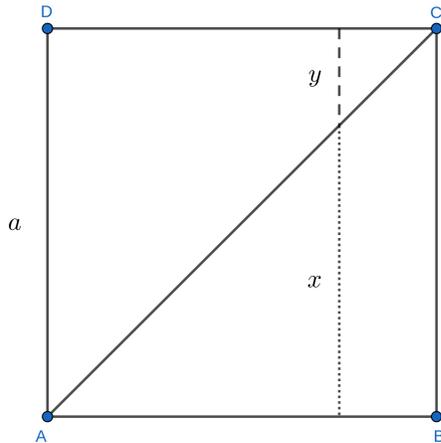


FIGURE 2.6 – Détermination de l'aire sous la courbe  $x$

Prenons par exemple le cas  $n = 1$  et observant le carré ci-contre, de côté  $a$ , séparons celui-ci en deux triangles en traçant une des diagonales. La distance entre la diagonale et le bas du carré sera notée  $x$  et celle entre le haut et la diagonale,  $y$ .

La notation  $\sum_A^B a$  représente la somme de toutes les lignes de longueur  $a$  entre  $A$  et  $B$ . Ces lignes sont ce que Cavalieri appelle des indivisibles. On a alors

$$\sum_A^B a = \sum_A^B (x + y) = 2 \sum_A^B x.$$

La dernière égalité provient du fait qu'il y a autant de lignes de longueur  $x$  que de longueur  $y$  dans le carré.<sup>3</sup>

En isolant  $\sum_A^B x$ , on trouve

$$\sum_A^B x = \frac{1}{2} \sum_A^B a$$

Or, la somme de toutes les lignes de longueur  $a$  représente l'aire complète du carré, soit  $a^2$ . Ce faisant,  $\sum_A^B x = \frac{1}{2}a^2$ .

En utilisant plusieurs astuces, Cavalieri a démontré la formule pour  $n$  allant jusqu'à 9. Il a ensuite conjecturé que le résultat était vrai pour tout  $n$ , mais il ne l'a pas prouvé. Dans les

3. Il est à noter que le nombre de longueurs  $x$  et  $y$  est une infinité, car les lignes sont toutes des indivisibles, ce qui peut créer des problèmes tel que le montre la [Figure 2.7](#).

années qui ont suivi, Fermat, Pascal et Roberval ont tous donné une démonstration plus ou moins rigoureuse de ce résultat. (Edwards, 2012, p. 110)

Les méthodes de Cavalieri ont fait l'objet de plusieurs critiques au fil des années. En effet, comme il travaille avec un nombre infini de quantités, et que ces quantités ne sont pas bien définies, certaines manipulations entraînent des résultats faux. Ainsi, la figure ci-contre se retrouve dans un ouvrage de Cavalieri. (Cavalieri (1647)) On voit bien que les aires des deux triangles  $\triangle ABD$  et  $\triangle CBD$  sont différentes.

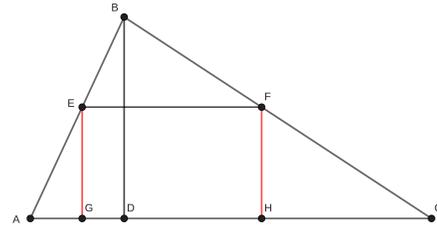


FIGURE 2.7 – Utilisation erronée de la méthode de Cavalieri

Toutefois, il est possible d'associer à chaque segment  $EG$ , ou indivisible, du triangle de gauche, un segment  $FH$  dans le triangle de droite. Il y a donc le même nombre d'indivisibles dans chaque triangle, toutefois leurs aires sont différentes.

Cette contradiction est due au fait que le nombre d'invisibles dans chaque triangle est une infinité. Ainsi, bien qu'il existe une bijection entre les segments des deux triangles, leurs aires peuvent être différentes, car leurs bases n'ont pas la même longueur malgré le fait qu'ils ont le même nombre de points, soit une infinité. C'est la même particularité qui fait qu'il y a autant de nombres réels sur l'intervalle  $]0,1[$  que sur la droite réelle au complet.

Néanmoins, ce n'est pas l'application du théorème de Cavalieri qui mène à ce résultat. En effet, pour appliquer le théorème de Cavalieri, les segments comparés doivent être parallèles aux bases, et les hauteurs doivent être égales. Ici, les segments sont parallèles à  $BD$ , et par ce fait même, les hauteurs sont  $AD$  et  $CD$ , qui ne sont pas égales.

Étant donné qu'il était possible d'arriver à des résultats faux par une interprétation erronée des indivisibles ou des méthodes d'indivisibles, comme vu à la Figure 2.7 celles-ci ont fait l'objet de plusieurs critiques au sein de la communauté mathématique. Il devenait effectivement assez difficile de savoir si les résultats obtenus étaient réellement exacts et, le

cas échéant, s'ils étaient obtenus de façon rigoureuse. Les méthodes d'indivisibles, ou de quantités infinitésimales, ont toutefois été réutilisées à plusieurs reprises avant la formalisation de ces quantités, de nombreuses années plus tard. En effet, Fermat utilisait ces quantités particulières dans ses premières méthodes de tangentes. De même, lorsque Newton et Leibniz ont inventé leur calcul, ils faisaient aussi mention de quantités infinitésimales.

Les indivisibles ont donc créé beaucoup de controverses dans le monde mathématique, mais ce sont également eux qui sont à l'origine des premiers résultats du calcul différentiel. Ce fut l'outil principal avant la formalisation par Cauchy et Weierstrass de l'analyse, près de 200 ans plus tard.

## Chapitre 3

# Construction de tangentes

De nos jours, au cégep, on enseigne aux étudiants à calculer les pentes de tangentes à des courbes, avant de leur enseigner comment calculer l'aire sous celles-ci. En réalité, on leur enseigne premièrement la notion de limite, avant même de discuter de l'utilité de cette dernière. Cette façon de faire est complètement à l'opposé de l'ordre dans lequel ces concepts ont été définis historiquement. En effet, comme on a pu le constater à la [sous-section 1.2.2](#), calculer les aires de régions géométriques était déjà un problème classique et ce, il y a des milliers d'années. Les calculs de pentes de tangentes, pour leur part, sont apparus bien plus tard, dans les années 1600. De plus, les premiers calculs qui ont été effectués n'utilisaient aucune notion de limite, contrairement à ce qu'on enseigne aux étudiants en première année de cégep.

La plupart des étudiants au collégial, et même à l'université, n'ont aucune idée qu'il est possible de calculer la pente d'une tangente sans utiliser la notion de limite. En effet, pour eux, la définition de la pente de la tangente à une fonction  $f$  au point  $x$  est liée intrinsèquement à la notion de dérivée, qui elle est définie comme suit :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Ce concept rigoureux d'une dérivée exprimée à l'aide de la limite a été introduit bien plus tard dans l'histoire des mathématiques. Cela n'a toutefois pas empêché les mathématiciens de faire

des calculs de pente de tangente dès les années 1630. Il est à noter que la plupart fonctions auxquelles ils s'intéressaient étaient soit des lieux géométriques, soit des polynômes.

### 3.1 Les pseudo-égalités de Fermat

La première motivation qui a poussé les mathématiciens à étudier le concept de tangente était la recherche de maximum et de minimum. C'est Pierre de Fermat qui a été le premier à calculer des maximums à l'aide d'une méthode qu'il n'a jamais vraiment explicitée ou démontrée de façon rigoureuse, mais qui donnait des résultats qui, on le sait maintenant, étaient corrects.

Étant donné que Fermat n'a pas donné d'explication pour sa méthode, nous ne pouvons qu'essayer de donner une interprétation des calculs qu'il nous a laissés. Par exemple, Fermat a calculé le côté du rectangle de périmètre donné qui a une aire maximale. Traduit mathématiquement, soit  $B$  le demi-périmètre du rectangle, on veut maximiser

$$A(B - A),$$

où  $A$  est un des côtés du rectangle. Suivant la notation de Viète, tel que discuté au [précédent chapitre](#), Fermat utilisait des voyelles pour les inconnues et des consonnes pour les constantes. ([Strømholm \(1968\)](#))

Lorsque l'aire du rectangle est presque à son maximum, et que le côté  $A$  ne varie que légèrement, l'aire du rectangle ne varie également que légèrement. Ce faisant, les deux aires sont presque égales. Soit  $E$ , la variation du côté  $A$ , on a alors

$$\begin{aligned} AB - A^2 &\sim (A + E)(B - (A + E)) \\ &\sim AB + EB - A^2 - 2AE - E^2. \end{aligned}$$

En annulant les termes égaux de chaque côté de la pseudo-égalité, on obtient

$$EB - 2AE - E^2 \sim 0.$$

Puis, en divisant de chaque côté par  $E$  et en négligeant le terme restant en  $E$ , on obtient

$$B - 2A \sim 0,$$

et donc  $A = \frac{B}{2}$ . C'est-à-dire que le rectangle ayant une aire maximale pour un périmètre donné est en fait un carré.

On peut voir cette méthode comme une façon générale de déterminer le maximum d'une certaine fonction en utilisant des quantités très petites. Toutefois, il faut faire attention, car on commence par diviser de chaque côté par  $E$ , puis on agit comme si  $E$  valait 0 en négligeant le terme restant. Cet aspect fera d'ailleurs l'objet de plusieurs critiques envers les méthodes utilisant des quantités infinitésimales. Fermat, de son côté, ne spécifiait pas que  $E$  devait être petit, et ne parlait pas de limite en aucun cas.

Le même genre d'idée était également utilisé par Fermat pour calculer des pentes de tangentes.

En effet, soit la droite  $AE$ , tangente à  $f(x)$  en  $A$ ; on peut alors voir que les triangles  $\triangle ABE$  et  $\triangle CDE$  sont semblables. Ainsi, leurs côtés sont proportionnels, c'est-à-dire

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EB}{ED}.$$

Or, si on connaît  $EB$ , qu'on nommera la *sous-tangente*, on peut trouver la pente de la tangente  $AE$ , soit  $\frac{AB}{EB}$ .

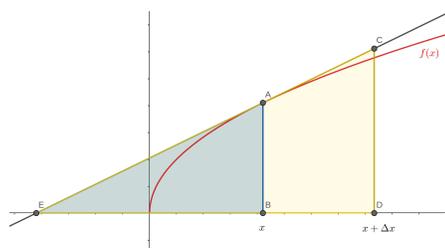


FIGURE 3.1 – Détermination de la sous-tangente.

Ainsi, en isolant  $EB$  on trouve

$$\begin{aligned}\frac{AB}{CD} &= \frac{EB}{ED} = \frac{EB}{EB + BD} \\ \iff EB \cdot CD &= AB \cdot EB + AB \cdot BD \\ \iff EB(CD - AB) &= AB \cdot BD \\ \iff EB &= \frac{AB \cdot BD}{CD - AB}.\end{aligned}$$

Si on remplace les segments  $AB$  et  $BD$  respectivement par leurs valeurs  $f(x)$  et  $\Delta x$ , et en approximant  $CD$  par  $f(x + \Delta x)$ , on trouve

$$EB \sim \frac{f(x)\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)}.$$

Ce faisant,

$$EB \sim \frac{f(x)}{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

et

$$\frac{AB}{EB} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Or, on sait que  $f(x + \Delta x) - f(x)$  est divisible par  $\Delta x$  si  $f(x)$  est un polynôme. En effet, soit  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ , la formule du binôme de Newton nous donne

$$\begin{aligned}f(x + \Delta x) - f(x) &= a_n(x + \Delta x)^n + \dots + a_1(x + \Delta x) + a_0 - (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) \\ &= a_n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (\Delta x)^{n-i} + \dots + a_1 x + a_0 - (x^n + \dots + a_1 x + a_0) \\ &= a_n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x^i (\Delta x)^{n-i} + \dots + a_1 \Delta x.\end{aligned}$$

On remarque que pour tous les termes de la différence, les termes de la forme  $a_i x^i$  s'annulent tous. Ainsi, comme  $(\Delta x)^{n-i}$  est divisible par  $\Delta x$  et ce pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , tous les termes sont divisibles par  $\Delta x$  et donc  $f(x + \Delta x) - f(x)$  est divisible par  $\Delta x$  pour tout

polynôme  $f(x)$ .

Une fois la division faite, Fermat fait disparaître les termes restants en  $\Delta x$  et trouve ainsi la pente de la tangente. On peut remarquer que le quotient trouvé est ce que l'on nomme aujourd'hui *quotient différentiel*, quotient qui est de nos jours utilisé pour calculer la dérivée. Toutefois, il n'est toujours pas question de limite, et Fermat ne mentionne pas que  $\Delta x$  doit être petit pour que ça fonctionne. Or, comme on utilise  $f(x + \Delta x)$  pour approximer  $CD$  et qu'on néglige  $\Delta x$ , il faudrait bel et bien que cette quantité soit petite.

## 3.2 Composition de mouvements instantanés

Gilles Personne de Roberval, mathématicien français qui vécut de 1602 à 1675, a développé dans les années 1630-1640 une méthode de composition de mouvements afin de calculer les « touchantes de lignes courbes ». Ces touchantes sont ce qu'on appelle aujourd'hui les tangentes à des courbes. Bien que Roberval lui-même n'ait jamais publié ses méthodes, l'un de ses étudiants a composé un traité à partir de ses leçons qui se nomme *Observations sur la composition des mouvements, et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes*. Bien qu'il ne l'ait pas écrit lui-même, Roberval l'a toutefois révisé avant de le lire à l'Académie des sciences en 1668. Il figure maintenant dans un recueil d'ouvrages publié par celle-ci. ([Roberval \(1693\)](#))

La méthode générale de Roberval consistait à briser une certaine courbe en deux mouvements qui la composaient. Une fois ces deux mouvements trouvés, il additionnait les vecteurs à l'aide de la règle du parallélogramme, qui était une règle déjà connue à l'époque, afin de trouver le mouvement instantané. L'une de ses grandes réalisations fut d'avoir calculé la tangente à la cycloïde à l'aide de cette méthode.

**Définition 3.2.1.** Soit  $\Gamma$ , un cercle de centre  $C$  et  $A$ , un point sur ce cercle. La *cycloïde* est le lieu géométrique défini par le point  $A$  lorsque le cercle roule sans glisser.

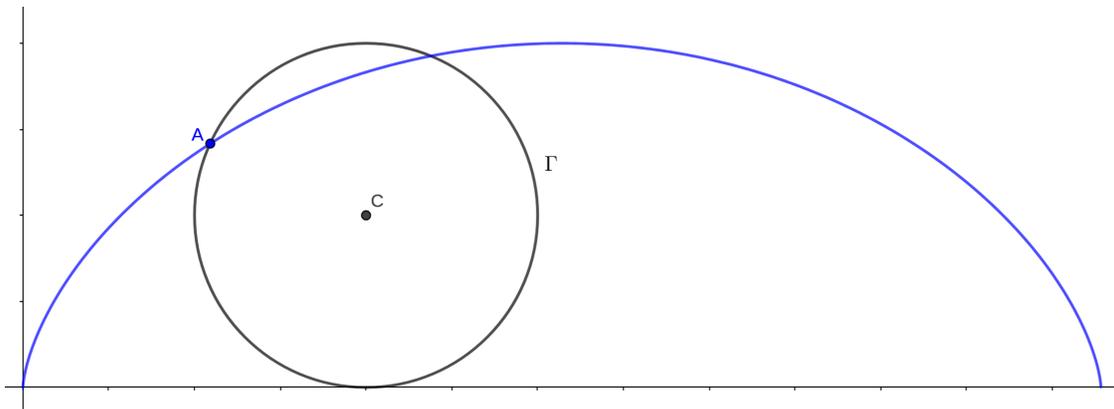


FIGURE 3.2 – Cycloïde définie par le cercle  $\Gamma$  et le point  $A$

La cycloïde est alors la composition de deux mouvements, soit une rotation et une translation. Lorsque le cercle roule vers la droite, le point  $A$  possède une vitesse linéaire  $\vec{u}$  dans la même direction que le centre du cercle. De plus, le point  $A$  possède également une vitesse radiale  $\vec{v}$ , qui est une vitesse dans une direction tangente au cercle, c'est-à-dire perpendiculaire au rayon.

En additionnant ces deux vecteurs de vitesses à l'aide de la règle du parallélogramme, on trouve le vecteur de vitesse instantanée au point  $A$ , soit le vecteur  $\vec{w}$ .

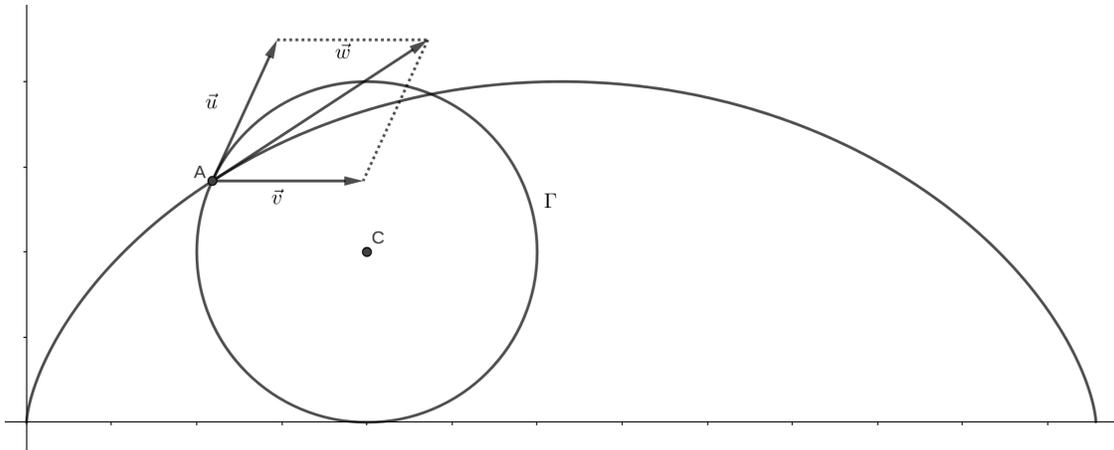


FIGURE 3.3 – Détermination de la vitesse tangente à la cycloïde.

En réalité, les sources semblaient différer sur la façon d'obtenir la vitesse finale, car les deux

sources secondaires consultées sur ce sujet spécifique mentionnaient d'un côté que Roberval utilisait la bissectrice, et de l'autre qu'il utilisait une somme de vecteur à l'aide de l'identité du parallélogramme. C'est ce conflit qui m'a poussé à remonter au texte original de Roberval afin de réconcilier ces deux visions modernes avec la source originale.

Cela provient du fait que Roberval n'utilise pas toujours la même méthode afin de calculer la tangente. En effet, l'exemple de la cycloïde, qui est le onzième exemple de Roberval, utilise bien la somme des mouvements à l'aide de l'identité du parallélogramme. Toutefois, c'est l'un des seuls exemples, avec celui de la spirale d'Archimède, où il utilise cette composition de vecteurs. (Roberval (1693)) Pour ses autres exemples, Roberval n'utilise pas exactement la même méthode, comme on le verra à la prochaine sous-section.

Pour en revenir à la cycloïde, de nos jours on la paramétrise également en s'inspirant de la composition de ses mouvements. En effet, on peut définir le point  $A$  comme le vecteur origine  $\overrightarrow{OA}$  qui est la somme du vecteur de déplacement du centre du cercle et du vecteur de rotation du point  $A$  en fonction du centre  $C$ . C'est-à-dire,

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}.$$

Or, le vecteur  $\overrightarrow{OC}$  est le vecteur de déplacement du centre du cercle et vaut  $(r\theta, r)$  où  $r$  est le rayon du cercle et  $\theta$  un paramètre. Le fait que le déplacement en  $x$  vaut  $r\theta$  est lié au fait que le déplacement horizontal est en fait la longueur de l'arc du cercle lorsque celui-ci tourne d'un angle  $\theta$ . Le vecteur  $\overrightarrow{CA}$ , pour sa part, est le vecteur  $(-r \sin \theta, -r \cos \theta)$ , vecteur classique de paramétrisation d'un cercle qu'on a modifié pour tourner en sens horaire à partir de l'angle  $-\frac{\pi}{2}$ . Ainsi, la paramétrisation de la cycloïde est

$$r(\theta) = (r\theta, r) + (-r \sin \theta, -r \cos \theta) = (r\theta - r \sin(\theta), r - r \cos \theta).$$

On peut ainsi trouver le vecteur tangent  $r'(\theta)$  en dérivant  $r(\theta)$ , ou encore en dérivant chacun

des termes qui le compose, c'est-à-dire

$$r'(\theta) = (r, 0) + (-r \cos \theta, r \sin \theta).$$

On remarque que le vecteur  $(r, 0)$  est le vecteur de translation  $\vec{v}$  sur la [Figure 3.3](#) et le vecteur  $(-r \cos \theta, r \sin \theta)$  est le vecteur tangent au cercle, soit le vecteur  $\vec{u}$  sur la [Figure 3.3](#). On peut ainsi voir que la méthode de composition de mouvements de Roberval fonctionne très bien pour la cycloïde. Toutefois, il faut rappeler que Roberval n'avait aucune connaissance de l'idée de paramétrisation et que ses démarches étaient purement géométriques.

### 3.2.1 La méthode de Roberval pour les coniques

Pour les coniques, Roberval ne travaillait qu'avec les directions des vecteurs et non pas leurs normes. Il tenait en fait pour acquis que les vecteurs étaient de même norme, ce qui aurait dû être démontré au préalable tel que l'explique Serret. ([Serret, 1855](#), p. 53-55) Ainsi, pour faire la composition de mouvements, il ne considérait que la bissectrice des angles formés par les deux vecteurs de vitesse; ce n'était alors que par un heureux hasard qu'il arrivait à la bonne tangente. Il est tout de même intéressant de s'attarder à ces exemples. ([Edwards, 2012](#), p. 137)

**Définition 3.2.2.** Soit  $F_1$  et  $F_2$ , deux points fixés, qu'on nommera foyers, et  $a$  une certaine longueur positive. L'*ellipse* est le lieu géométrique des points  $x$  tels que  $d(x, F_1) + d(x, F_2) = 2a$ , où  $d(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}$  est la distance euclidienne. C'est donc le lieu des points dont la somme des distances aux foyers est constante.

**Définition 3.2.3.** Soit  $\Delta$ , une droite directrice et  $F$ , un point fixé qu'on nommera foyer. La *parabole* est le lieu géométrique des points tels que  $d(x, F) = d(x, \Delta)$ , où  $d(x, \Delta) = \min_{y \in \Delta} d(x, y)$ . C'est donc le lieu des points dont la distance au foyer est égale à la distance perpendiculaire à la directrice.

Considérant ces définitions, il est possible, pour chacune des coniques, de voir le déplacement

comme une composition de mouvements liés aux foyers et à la directrice.

Pour l'ellipse, on peut imaginer deux clous représentant nos foyers et une corde de longueur  $2a$ , c'est-à-dire la longueur du grand axe, dont les extrémités sont fixées en  $F_1$  et  $F_2$ . Pour tracer l'ellipse, il suffit de placer un crayon contre la corde, de tendre cette dernière à l'aide du crayon. Le crayon se retrouve alors au point  $A$  sur la figure ci-contre. En déplaçant le crayon tout en restant au bout de la corde, on obtient l'ellipse.

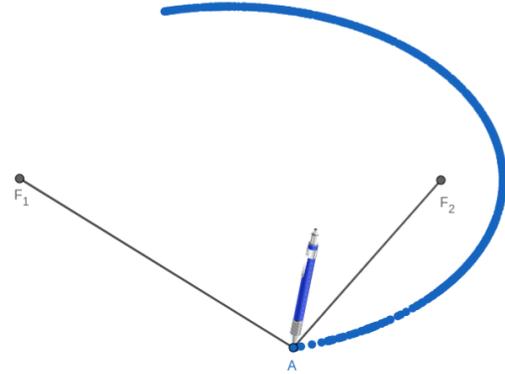


FIGURE 3.4 – Tracer l'ellipse à partir des foyers et de la longueur du grand axe.

La vitesse instantanée du crayon dépend ainsi de deux mouvements ; il se rapproche du point  $F_1$  à une vitesse  $\vec{u}$  et il s'éloigne du point  $F_2$  à une vitesse  $\vec{v}$ . Ainsi, la vitesse instantanée du crayon est la somme de ces deux vitesses, soit le vecteur  $\vec{w}$  à la Figure 3.5.

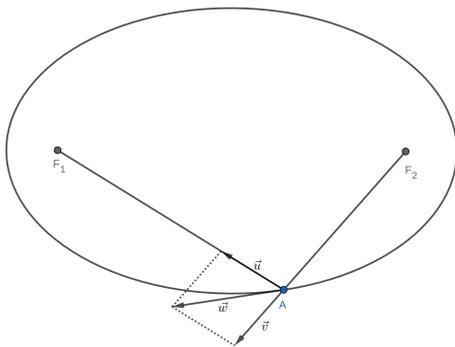


FIGURE 3.5 – Composition des mouvements créant l'ellipse.

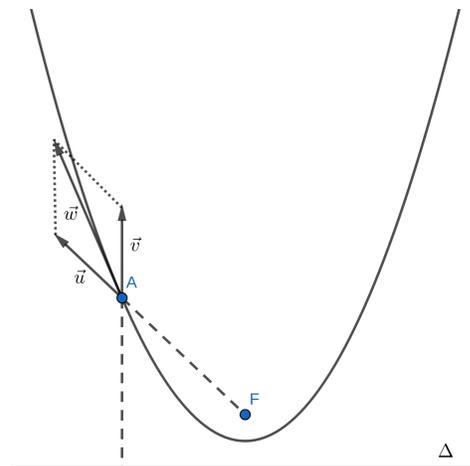


FIGURE 3.6 – Composition des mouvements créant la parabole.

En utilisant les mêmes idées, on peut construire la tangente à une parabole. À ce moment, le point  $A$  s'éloigne du foyer à une vitesse  $\vec{u}$  et s'éloigne de la directrice  $\Delta$  à une vitesse  $\vec{v}$ . La résultante est donc le vecteur  $\vec{w}$ . Remarquons que lorsqu'on fait la somme des vecteurs en utilisant l'identité du parallélogramme, on obtient en fait un losange, dû au fait que les normes des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont égales.

### 3.2.2 Parenthèse pédagogique : Tracer les tangentes aux coniques

Lorsque les élèves du secondaire se retrouvent au cégep, ils sont confrontés à la définition de tangente à l'aide du quotient différentiel qui, en plus de ne pas être une notion très intuitive, crée un certain conflit cognitif avec l'image qu'ils ont d'une tangente. En effet, les seules tangentes auxquelles les élèves du secondaire font face sont les tangentes à un cercle, qu'on peut tracer facilement à l'aide du rayon du cercle. On leur demande ensuite de tracer la tangente à des courbes quelconques, qui sont le plus souvent des courbes qu'ils n'ont jamais vues.

Discuter de tangentes aux coniques à la fin du secondaire, ou encore au cégep, pourrait avoir plusieurs points positifs. Notamment, cela donnerait aux étudiants d'autres exemples de tangentes que simplement la tangente à un cercle. Cela leur ferait également manipuler davantage les définitions des coniques à l'aide de leurs foyers et directrices.

Effectivement, les élèves du secondaire en profil Sciences Naturelles (SN) ou Technico Sciences (TS) sont familiers avec la définition des coniques telles qu'on les a données aux définitions 3.2.2 et 3.2.3. Les vecteurs étant des objets que les étudiants sont également habitués à manipuler, ils ne devraient pas avoir de problème à effectuer les sommes géométriques de vecteurs nécessaires à la méthode de Roberval. Les élèves arrivant au cégep seraient alors dans un territoire un peu plus connu et auraient une meilleure intuition de ce à quoi ressemble la tangente à une courbe quelconque.

De plus, les étudiants poursuivant des études en génie à l'université font souvent face à des

lieux géométriques représentés par des coniques. En effet, lors de l'étude de fonctions à plusieurs variables, les courbes de niveau sont des outils particulièrement intéressants pour comprendre l'aspect tridimensionnel de ces fonctions. Or, les courbes de niveau sont régulièrement des cercles, des ellipses, des paraboles ou des hyperboles. Ces coniques ne sont toutefois pas abordées dans les cours de cégep. Ainsi, les étudiants qui doivent manipuler ces objets dans des cours avancés et qui ne les ont pas manipulés depuis leur dernière année du secondaire se retrouvent souvent perdus.

La détermination des tangentes aux coniques en utilisant la méthode de Roberval pourrait ainsi avoir plusieurs avantages. Les enseignants auraient alors la possibilité de réintroduire les définitions des coniques, et les étudiants auraient l'occasion de manipuler ces objets une fois de plus avant l'université. Également, cela permettrait aux étudiants d'avoir des références supplémentaires de ce que représente visuellement la tangente à une courbe, plutôt que d'avoir seulement la représentation de la tangente à un cercle.

### 3.3 Un calcul différentiel géométrique

De nos jours, la plupart des calculs de tangentes et d'optimisation se font à l'aide de la notion de dérivée. Par exemple, pour trouver le maximum d'une certaine fonction, il suffit de regarder l'endroit où sa dérivée vaut 0, comme l'énonce le théorème suivant.

**Théorème 3.3.1.** *Soit  $f(x)$ , une fonction dérivable sur son domaine  $D \subset \mathbb{R}$ . Soit  $a \in D$ , un point du domaine de  $f(x)$  tel que  $f(x) \leq f(a) \forall x \in D$ , (resp.  $f(x) \geq f(a) \forall x \in D$ ) c'est-à-dire  $(a, f(a))$  est le maximum (resp. minimum) de la fonction  $f(x)$ . Alors  $f'(a) = 0$ .*

Comme l'annulation de la dérivée en un point est une condition nécessaire, mais non suffisante, pour qu'un point soit un extremum de la fonction, il faut donc repérer les endroits où la dérivée vaut 0 et observer le comportement de la fonction autour de ces points afin de déterminer les extremums de la fonction.

Cette technique est simple et efficace ; toutefois, cette vision de la dérivée n'est arrivée que plus tard dans l'histoire des mathématiques. On a vu à la [section 3.1](#), que Fermat calculait des maximums à l'aide de pseudo-égalités. Il n'était toutefois pas le seul à avoir développé des méthodes afin de calculer, tangentes, maximums et minimums. René Descartes a également inventé une méthode qui permettait de trouver des tangentes en utilisant simplement des notions d'algèbre élémentaire. En effet, les méthodes de Descartes n'utilisent aucune notion d'indivisibles ou de quantités infinitésimales. Par la suite, Johannes Hudde a développé des techniques pour rendre les calculs de tangentes plus faciles, techniques qui permettent également de calculer des maximums et des minimums. La présente section discute ainsi de ces méthodes rigoureuses ne nécessitant l'usage ni de la limite, ni d'infinitésimaux, afin d'arriver à certains des résultats les plus connus du calcul différentiel. ([Edwards, 2012](#), p. 125-129), ([Suzuki \(2005\)](#)) , ([Haverhals et Roscoe \(2012\)](#))

### 3.3.1 Méthode de construction de tangente de Descartes

L'outil principal dont se sert Descartes afin de trouver les tangentes à un polynôme est le théorème suivant.

**Théorème 3.3.2.** *Soit  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$  un polynôme à coefficients réels de degré  $n$ . Soit  $a \in \mathbb{R}$  une racine de multiplicité  $k \leq n$  du polynôme  $P(x)$ . Alors il existe un  $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ , de degré  $n - k$ , tel que*

$$P(x) = (x - a)^k Q(x).$$

Tout comme Descartes, nous acceptons ici ce théorème, dont la démonstration rigoureuse découle de la division euclidienne de polynômes.

En utilisant ce théorème, un cercle, ainsi qu'un système d'équations à plusieurs inconnues, Descartes arrive à calculer la tangente à n'importe quel polynôme — ou expression ne contenant que des puissances étant des multiples de  $\frac{1}{2}$  — bien que les calculs deviennent rapidement lourds. Regardons un exemple afin de comprendre la méthode utilisée par

Descartes.

**Exemple 3.3.1.** Supposons qu'on veuille calculer la pente de la tangente à la courbe  $y = \sqrt{x}$  au point  $P = (9, 3)$ . Descartes construit premièrement un cercle centré en  $(h, 0)$ , c'est-à-dire à quelque part sur l'axe des  $x$ , et passant par le point  $P$ . Ce cercle a alors deux intersections avec la courbe  $y$ . La première est le point  $P$ , et la seconde sera nommée  $A$ . Le point  $A$  peut être à gauche ou à droite, comme on peut le voir aux figures ci-dessous.

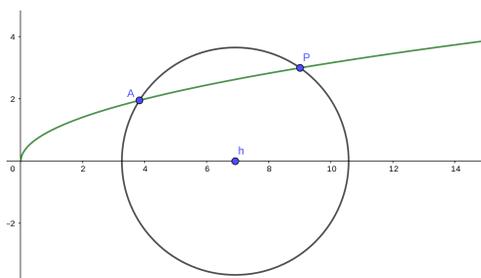


FIGURE 3.7 – *Intersection à droite*

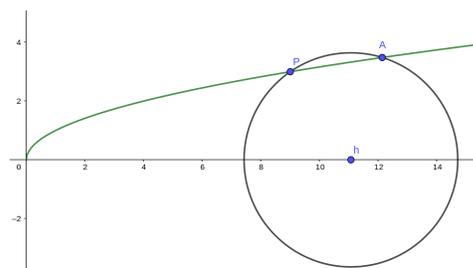


FIGURE 3.8 – *Intersection à gauche*

Comme l'équation du cercle est  $(x - h)^2 + y^2 = r^2$  et que l'équation de la parabole est  $y = \sqrt{x}$ , on peut substituer cette valeur de  $y$  dans l'équation du cercle pour obtenir

$$(3.1) \quad (x - h)^2 + (\sqrt{x})^2 = r^2.$$

Il y a alors deux solutions à l'équation 3.1, soit  $A$  et  $P$ , les deux intersections de  $\sqrt{x}$  et du cercle. Ces deux solutions sont ainsi des racines de

$$(x - h)^2 + x - r^2 = 0.$$

Si le point  $A$  et le point  $P$  sont confondus, l'équation possède une racine double en  $x = 9$ . Le cercle est alors tangent à la courbe  $\sqrt{x}$  et tous deux possèdent la même tangente, soit celle recherchée. Si on trouve la valeur de  $h$ , on pourra calculer la pente de cette tangente.

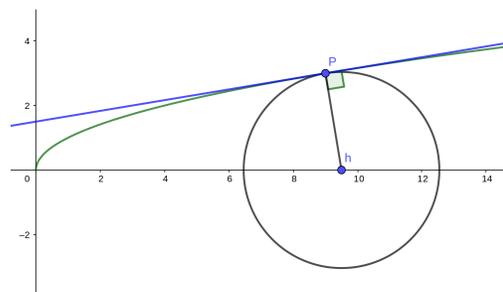


FIGURE 3.9 – *Le point  $A$  et le point  $P$  sont confondus*

Le [théorème 3.3.2](#) nous dit que la situation où  $A$  et  $P$  sont confondus se traduit mathématiquement par

$$(x - h)^2 + x - r^2 = B(x - 9)^2, \quad \text{où } B \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, l'expression de gauche est un polynôme de degré 2 avec une racine double en  $x = 9$ . En développant de chaque côté de l'équation et en regroupant les puissances de  $x$ , on trouve

$$x^2 - (2h - 1)x + (h^2 - r^2) = Bx^2 - 18Bx + 81B.$$

En comparant les coefficients liés aux puissances de  $x$  de chaque côté, on voit facilement que  $B = 1$ , puis que

$$2h - 1 = 18, \quad h^2 - r^2 = 81.$$

On a donc  $h = \frac{19}{2}$  et  $r = \frac{\sqrt{37}}{2}$ . Comme on possède maintenant les coordonnées du centre du cercle,  $(h, 0)$ , et du point  $P(9, 3)$ , on peut calculer la pente du rayon du cercle, qui est de  $-6$ . Comme la tangente à un cercle est toujours perpendiculaire au rayon, la pente de la tangente est l'opposée de l'inverse, soit  $\frac{1}{6}$ . Les tangentes au cercle et à la courbe étant confondues, la pente de la tangente à la courbe  $\sqrt{x}$  au point  $P$  est aussi  $\frac{1}{6}$ . Nous aurions également pu, de la même façon, montrer que la tangente à un point quelconque  $(x_0^2, x_0)$  est  $\frac{1}{2x_0}$ , ce que fait Suzuki. ([Suzuki \(2005\)](#))

Cet exemple nécessite peu de calcul, car le degré du polynôme est bas. Toutefois, la méthode de Descartes entraîne des manipulations algébriques qui peuvent rapidement devenir lourdes, comme l'illustre bien l'exemple suivant.

**Exemple 3.3.2.** Soit le polynôme  $y = x^2 + x + 1$  et trouvons sa tangente au point  $(1, 3)$ . L'équation du cercle est, comme précédemment,  $(x - h)^2 + y^2 = r^2$ . En substituant la valeur

de  $y$  pour le polynôme dans l'équation du cercle, on trouve

$$\begin{aligned}(x-h)^2 + (x^2 + x + 1)^2 &= r^2 \\ x^2 - 2ax + a^2 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 &= r^2 \\ x^4 + 2x^3 + 4x^2 + (2-2a)x + a^2 + 1 - r^2 &= 0.\end{aligned}$$

La dernière expression devra avoir une racine double en  $x = 1$  afin que le cercle soit tangent à la courbe. Comme le polynôme est de degré 4, on obtient par le [théorème 3.3.2](#)

$$\begin{aligned}x^4 + 2x^3 + 4x^2 + (2-2a)x + a^2 + 1 - r^2 &= (x-1)^2(Ax^2 + Bx + C) \\ x^4 + 2x^3 + 4x^2 + (2-2a)x + a^2 + 1 - r^2 &= Ax^4 + (B-2A)x^3 + (C-2B+A)x^2 + (B-2C)x + C.\end{aligned}$$

En comparant les coefficients de chaque côté, on obtient le système d'équation suivant

$$\begin{aligned}1 &= A \\ 2 &= (B-2A) \\ 4 &= (C-2B+A) \\ (2-2h) &= (B-2C) \\ h^2 + 1 - r^2 &= C\end{aligned}$$

On trouve alors  $A = 1$ ,  $B = 4$ ,  $C = 11$ ,  $h = 10$ ,  $r = \sqrt{90}$ . Le cercle est ainsi centré au point  $(10, 0)$ , la pente de son rayon est donc  $\frac{-1}{3}$  et la pente de la tangente 3. Ce qui correspond bien à la tangente obtenue par les méthodes usuelles :

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 + x + 1 \\ f'(x) &= 2x + 1 \Rightarrow f'(1) = 3.\end{aligned}$$

Bien que les calculs deviennent rapidement lourds, on peut remarquer qu'ils sont toujours faisables à la main si on y met le temps. En effet, imaginons qu'on veuille trouver la tangente à un polynôme de degré  $n$ . Le polynôme à la gauche de l'égalité sera un polynôme de degré  $2n$  et possédera deux inconnues, soit  $h$  et  $r$  comme dans les exemples ci-dessus.

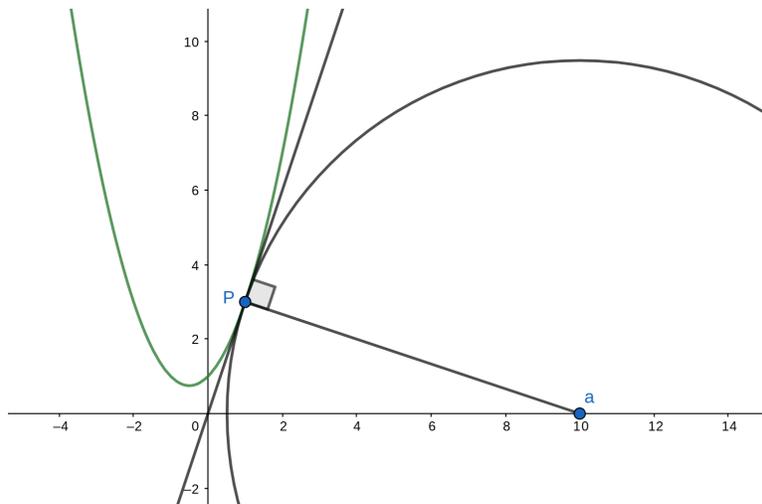


FIGURE 3.10 – La tangente à  $x^2 + x + 1$  au point  $(1, 3)$

Pour le polynôme du côté droit de l'égalité, nous aurons toujours un facteur  $(x - x_1)^2$  où  $x_1$  est l'abscisse du point où nous voulons calculer la tangente. Le polynôme restant sera alors de degré  $2n - 2$  par le [théorème 3.3.2](#). Il possède donc  $2n - 2 + 1$  inconnues, soit les coefficients de chacune des puissances de  $x$  entre 0 et  $2n - 2$ .

On obtient ainsi un système à  $2n - 2 + 1 + 2 = 2n + 1$  inconnues, et nous avons également  $2n + 1$  équations linéaires, car nous comparons chacun des coefficients des puissances de  $x$  des deux polynômes de degré  $2n$ .

La méthode de Descartes pour trouver des tangentes est donc à la fois élémentaire et pratique pour trouver les tangentes à des polynômes. Elle n'utilise aucun indivisible, aucune quantité infiniment petite et aucune limite implicite, ce qui la rend rigoureuse. Les seuls concepts nécessaires sont l'équation d'un cercle, le [théorème 3.3.2](#), ainsi que la résolution d'un système linéaire très simple comportant  $2n + 1$  équations et  $2n + 1$  inconnues.

### 3.3.2 Méthode de Hudde pour trouver des racines doubles

Comme nous avons pu le constater, la recherche de racines doubles, nécessaire à la construction de la tangente, peut être assez compliquée lorsque le degré du polynôme est

grand. Le mathématicien d'Amsterdam Johannes Hudde (1628-1704) a toutefois laissé son nom à une règle qui permettait de calculer ces racines de façon beaucoup plus simple. Le théorème suivant est tiré d'une correspondance entre lui et Franciscus van Schooten (1615-1660), un mathématicien Allemand qui fut l'enseignant de Hudde.

**Théorème 3.3.3** (Règle de Hudde). *Soit  $f(x) \in \mathbb{R}[x]$  un polynôme de degré  $n$ . Soit  $(b_i)_{i=0}^n$  une progression arithmétique quelconque, c'est-à-dire  $b_{i+1} = b_i + t$  pour un certain  $t \in \mathbb{Z}$ . Si  $d$  est une racine double de  $f(x)$ , alors  $d$  est une racine de  $g(x)$ , où  $g(x)$  est le polynôme obtenu en multipliant chacune des puissances de  $f(x)$  par le terme correspondant de la progression arithmétique. (Suzuki (2005))*

**Remarques :**

1. Le nombre de termes dans la progression arithmétique doit être égal au degré de  $f(x)$ , même si le nombre de termes dans  $f(x)$  lui est inférieur. Par exemple, si  $f(x) = x^4 - 1$ , alors une progression arithmétique appropriée serait  $(4, 3, 2, 1, 0)$  et non pas seulement  $(1,0)$  bien que  $f(x)$  ne comporte que deux termes.
2. Si  $d$  est une racine de  $f(x)$  de multiplicité plus élevée que 2,  $d$  sera également une racine de  $g(x)$ . C'est un corrolaire de la démonstration de la règle de Hudde.

Commençons avec un exemple afin de bien comprendre l'utilité de ce théorème.

**Exemple 3.3.3.** Soit  $f(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + (2 - 2h)x + h^2 + 1 - r^2$ , le polynôme de l'exemple 3.3.2. Dans le but de calculer la tangente au polynôme  $x^2 + x + 1$ , illustrée à la Figure 3.10, on cherchait la valeur de  $h$  pour laquelle le polynôme possédait une racine double en  $x = 1$ . Choisissons la progression arithmétique  $(4,3,2,1,0)$  et appliquons la procédure du théorème 3.3.3.

$$\begin{array}{c} \times \\ \left| \begin{array}{cccccc} x^4 & + & 2x^3 & + & 4x^2 & + & (2 - 2h)x & + & (h^2 + 1 - r^2) \\ 4 & & 3 & & 2 & & 1 & & 0 \end{array} \right| \\ \hline \left| \begin{array}{cccccc} 4x^4 & + & 6x^3 & + & 8x^2 & + & (2 - 2h)x & + & 0 \end{array} \right| \end{array}$$

Le nouveau polynôme  $g(x)$  obtenu est  $g(x) = 4x^4 + 6x^3 + 8x^2 + (2 - 2h)x$ . On cherche ainsi le  $h$  tel que  $g(1) = 0$ , car on veut avoir une racine double en  $x = 1$ . Or,

$$\begin{aligned} g(1) &= 4 + 6 + 8 + (2 - 2h) = 0 \\ &\iff h = 10. \end{aligned}$$

On a donc pu trouver le  $h$  beaucoup plus rapidement, tout simplement en effectuant un choix judicieux de progression arithmétique. Ce choix est celui qui annule le terme constant de  $f(x)$ , car il fait disparaître  $r$  et on se retrouve avec  $h$  comme seule inconnue.

Dans sa correspondance, Hudde donne une démonstration du [théorème 3.3.3](#) que ([Suzuki \(2005\)](#)) reprend dans ses mots pour le cas  $n = 5$ . Nous avons ici choisi de généraliser la démonstration pour un  $n$  quelconque.

*Démonstration (Règle de Hudde) :*

Soit  $f(x) \in \mathbb{R}[x]$  un polynôme de degré  $n$  et  $d$  une racine double de  $f(x)$ . Par le [théorème 3.3.2](#), on a que  $f(x)$  est de la forme

$$f(x) = (x - d)^2 \sum_{i=0}^{n-2} a_i x^i = (x^2 - 2xd + d^2) \sum_{i=0}^{n-2} a_i x^i.$$

On remarque que lorsqu'on multiplie  $(x^2 - 2xd + d^2)$  par les termes de la progression arithmétique, les trois termes du trinôme seront toujours multipliés par des termes consécutifs de la progression arithmétique. En effet, peu importe la puissance de  $x$  par laquelle on multiplie le trinôme, les trois termes ainsi obtenus seront toujours des puissances consécutives.

Soit  $b_j$  le terme qui multipliera  $x^2$ , alors  $2xd$  sera multiplié par  $b_j + t$  et  $d^2$  par  $b_j + 2t$ . On a alors l'expression

$$x^2 b_j - 2xd(b_j + t) + d^2(b_j + 2t) = x^2 b_j - 2xdb_j - 2xdt + d^2 b_j + 2d^2 t.$$

Or, pour  $x = d$ , qui correspond à la racine double de  $f(x)$ , on trouve

$$d^2b_j - 2d^2b_j - 2d^2t + d^2b_j + 2d^2t = 0.$$

Ce faisant, on a  $g(d) = 0$ , car chacun des termes de la sommation sera multiplié par 0. En effet, comme

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n-2} (b_i x^2 - 2xd(b_i + t) + d^2(b_i + 2t)) a_i x^i,$$

on a alors

$$\begin{aligned} g(d) &= \sum_{i=0}^{n-2} (b_i d^2 - 2d^2(b_i + t) + d^2(b_i + 2t)) a_i d^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} (0) a_i d^i = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $d$  est une racine de  $g(x)$ . ■

La règle de Hudde en est une qui permet alors de trouver rapidement des racines doubles ; en la combinant à la méthode du cercle de Descartes, elle permet de trouver facilement les tangentes à des courbes même lorsque celles-ci possèdent un degré élevé. En effet, peu importe le degré, cela fonctionne bien. Afin d'illustrer ce fait, démontrons un théorème élémentaire vu au cégep.

**Théorème 3.3.4.** *La dérivée de la fonction  $f(x) = x^n$  au point  $(x, f(x))$  est  $nx^{n-1}$ .*

*Démonstration :*

Soit la courbe  $f(x) = x^n$  et cherchons la tangente au point  $(x_0, f(x_0))$ . En substituant la valeur de  $f(x)$  pour  $y$  dans l'équation du cercle, on obtient

$$(x - h)^2 + x^{2n} - r^2 = x^{2n} + x^2 - 2hx + h^2 - r^2,$$

qui possède une racine double en  $x_0$ . En choisissant la progression arithmétique  $(2n, 2n -$

1, ..., 1, 0), on obtient

$$g(x) = (2n)x^{2n} + 2x^2 - 2hx.$$

Comme on veut une racine en  $x_0$ ,  $g(x_0) = 0$  et on a alors  $h = nx_0^{2n-1} + x_0$ . La pente du rayon de notre cercle est par conséquent  $\frac{-x_0^n}{nx_0^{2n-1}} = \frac{-1}{nx_0^{n-1}}$ .

Finalement, la pente de la tangente est donc  $nx_0^{n-1}$ . ■

La facilité avec laquelle nous avons pu démontrer ce théorème illustre bien à quel point les outils développés par Descartes et Hudde permettent d'effectuer des calculs intéressants. La méthode de Descartes permet de calculer la tangente à n'importe quel polynôme, bien que parfois les calculs deviennent un peu longs à effectuer, même s'ils sont très simples. Lorsqu'on combine la règle de Hudde à la méthode de Descartes, ces calculs sont réduits considérablement et il devient alors très facile de calculer la tangente à un polynôme.

La démonstration du [théorème 3.3.4](#) montre la simplicité des calculs, surtout lorsqu'on compare cette démonstration avec la démonstration classique de ce théorème. Celle-ci se fait à l'aide du quotient différentiel, et fait intervenir la formule du binôme de Newton, ce qui la rend lourde algébriquement.

### 3.3.3 Recherche de maximum et de minimum

Dans une autre lettre que Hudde écrit à son professeur, il mentionne une technique pour calculer les maximums et les minimums en n'utilisant encore une fois que le [théorème 3.3.3](#). Voici un exemple afin d'illustrer sa méthode de recherche de maximum et de minimum.

**Exemple 3.3.4.** Soit  $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x + 1$ , le polynôme dont on cherche à déterminer les extremums. Examinons l'équation  $f(x) = M$ , où  $M \in \mathbb{R}$  est une constante donnée. La [Figure 3.11](#) illustre cette situation.

Comme il s'agit d'une équation du 3e degré, elle possède trois solutions. En regardant la [Figure 3.11](#) on voit qu'il peut y avoir 3 solutions réelles, si  $M$  est entre le minimum et le maximum relatif de  $f(x)$ , 1 solution réelle et 2 solutions complexes si  $M$  est strictement plus grand ou plus petit que  $f(x)$ , et finalement 2 solutions réelles si  $M$  est égal au maximum ou au minimum relatif de  $M$ .

Sous ces conditions, il s'en suit que l'équation possède une solution de multiplicité deux et l'équation  $f(x) - M = 0$  a alors une racine double au point équivalent au maximum ou au minimum de  $f(x)$ . C'est ce fait qu'Hudde exploite pour déterminer les extremums.

Soit  $(d, M)$  le minimum ou le maximum de  $f(x)$ . Alors  $f(x) - M$  possède une racine double en  $x = d$ . Ainsi, par le [théorème 3.3.3](#), le polynôme  $g(x)$  possède une racine en  $x = d$ . Toutefois, comme on ne connaît pas la valeur de  $M$ , il faut une fois de plus effectuer un choix judicieux de progression arithmétique. En effet, il faut en

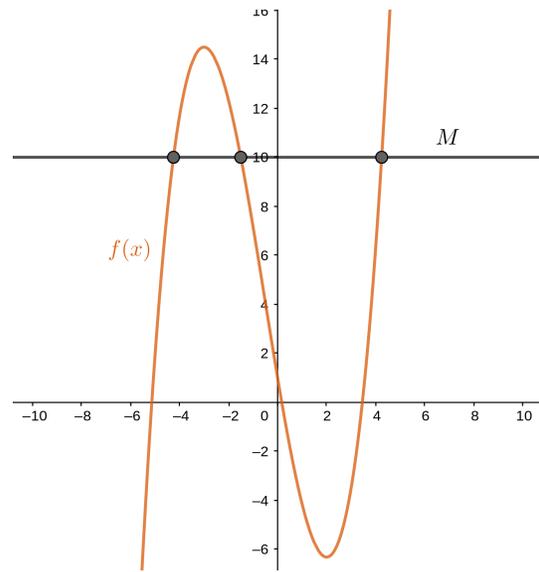


FIGURE 3.11 – Les équations de  $f(x)$  et de  $M$

choisir une qui annulera le terme constant afin de se débarrasser de  $M$ . Voici un choix qui permet cela. Il est à noter que tout choix de progression arithmétique comportant un 0 comme dernier terme fonctionnerait.

$$\times \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \frac{x^3}{3} & + & \frac{x^2}{2} & + & 6x & + & 1 - M \\ \hline 3 & & 2 & & 1 & & 0 \\ \hline x^3 & + & x^2 & - & 6x & + & 0 \end{array}$$

Ainsi,  $d$  est une racine de  $g(x) = x^3 + x^2 - 6x$ . En factorisant, on trouve

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - 6x &= x(x+3)(x-2) = 0 \\ \iff x &= 0, x = 2, x = -3 \end{aligned}$$

Ce faisant, si on a un maximum, c'est en  $x = 0$ ,  $x = 2$  ou  $x = -3$ . Il faut ensuite vérifier soit graphiquement, soit en étudiant les variations autour de ces points afin de déterminer s'il s'agit réellement d'un maximum, d'un minimum ou d'un point quelconque. Remarquons que le même processus est nécessaire lors de l'utilisation de la méthode de calcul usuel d'extremums à l'aide de la dérivée. Effectivement, rappelons le [théorème 3.3.1](#) n'est qu'une simple implication, une implication « dans un sens » si on veut. Si  $f(x)$  possède un maximum ou un minimum en  $d$ , alors  $f'(d) = 0$ . Toutefois, si  $f'(d) = 0$ , rien ne garanti que  $d$  soit un maximum ou un minimum, il faut donc examiner chacun des points trouvés pour déterminer s'il s'agit ou non d'un extremum.

Dans le cas qui nous intéresse, on voit graphiquement que  $x = 2$  est un minimum,  $x = -3$  est un maximum, et  $x = 0$  n'est ni un ni l'autre.

**Remarque :** Il est à noter que lorsqu'on utilise la progression arithmétique  $(n, n-1, \dots, 2, 1, 0)$  pour un polynôme  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , le polynôme  $g(x)$  obtenu est alors  $xf'(x)$ . En effet,

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline a_n x^n & + & a_{n-1} x^{n-1} & + & \dots & + & a_1 x & + & a_0 \\ \hline n & & n-1 & & \dots & & 1 & & 0 \\ \hline a_n n x^n & + & a_{n-1} (n-1) x^{n-1} & + & \dots & + & a_1 x & + & 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

et donc  $g(x) = x(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1) = x f'(x)$ . Les racines de  $g(x)$  correspondent ainsi aux racines de  $f'(x)$  auxquelles nous avons ajouté  $x = 0$ .

L'exemple que nous avons étudié démontre bien l'utilité de la méthode de Hudde pour

calculer les extremums de polynômes. De plus, dans la même lettre, Hudde explique également comment calculer les extremums de fonctions rationnelles et implicites à l'aide du même genre d'idée.<sup>1</sup> Par le fait même, il est alors possible de trouver les extremums de toute fonction algébrique à l'aide de la méthode de Hudde.

La [section 3.3](#) illustre bien à quel point les travaux de Hudde et de Descartes permettent de construire tout un calcul différentiel<sup>2</sup> sans aucune utilisation de limites ou d'infinitésimaux, mais seulement en utilisant la géométrie et l'algèbre de base. Ce calcul est alors applicable à toute fonction algébrique. La majeure différence avec le calcul différentiel introduit par Leibniz et Newton est que celui-ci peut également résoudre des problèmes qui comprennent des fonctions transcendantes. C'est ce qui explique probablement que le calcul différentiel géométrique introduit dans cette section, ou comme Suzuki l'appelle : « *The lost calculus* », soit tombé dans l'oubli avec l'invention du calcul différentiel de Newton et Leibniz.

### 3.3.4 Parenthèse pédagogique : Introduire la tangente à l'aide de Descartes

Lors de la rencontre du projet ARIM (Actions et rapprochements interordres en mathématiques) dirigée par Claudia Corriveau, professeur agrégé du Département d'études sur l'enseignement et l'apprentissage de l'Université Laval, nous avons pu discuter de la pertinence d'utiliser une approche basée sur le cercle tangent de Descartes afin de faire le lien entre les notions du secondaire et celles du cégep. Voici plusieurs points clés qui sont ressortis.

Les enseignants du collégial ont trouvé très intéressante l'idée de construire une activité à l'aide de la technique du cercle de Descartes, et ce pour plusieurs raisons. La première étant d'introduire les mathématiques de façon historique. En effet, les mathématiques sont souvent présentées sans contexte et les étudiants ne connaissent de l'histoire des mathématiques que quelques anecdotes racontées par leurs enseignants. Ils connaissent également souvent

---

1. Le lecteur voulant en savoir plus sur ces techniques est invité à consulter ([Suzuki \(2005\)](#)).

2. Notons ici que le terme calcul différentiel est utilisé dans le sens d'un calcul qui permet de trouver tangentes, maximums et minimums.

Newton et Leibniz, dont l'histoire a retenu les noms pour la création du calcul différentiel et intégral. Introduire la tangente à l'aide de Descartes permet de faire connaître davantage l'histoire des mathématiques aux étudiants, et de leur montrer qu'il y a eu d'autres mathématiciens avant Newton et Leibniz. De plus, les étudiants ont également entendu parler de Descartes dans leur cours de philosophie, et cela donne donc la possibilité de créer un lien interdisciplinaire très intéressant.

D'un autre côté, introduire cette technique permet également aux étudiants de relier la tangente à un cercle avec la tangente à une courbe. Au secondaire, la seule tangente avec laquelle ils ont été en contact est la tangente à un cercle, qui est définie comme la droite passant par un point du cercle et perpendiculaire au rayon à ce point.

Claudia Corriveau rapporte d'ailleurs avoir plusieurs fois vu, lors de ses recherches, des étudiants tracer des cercles au point où ils voulaient tracer la tangente. Ne pensant pas pouvoir faire de lien entre la tangente à un cercle et la tangente à une courbe quelconque, elle croyait alors que ces étudiants n'avaient simplement pas compris la notion de tangente. (Corriveau (2017)) Toutefois, après avoir entendu parler de la méthode du cercle de Descartes, elle mentionnait que l'idée de ces étudiants était en fait très logique et en accord avec le processus historique de développement de la tangente. (Corriveau (2018))

Les notions mathématiques nécessaires à la compréhension de la méthode du cercle de Descartes sont de plus très accessibles pour un étudiant qui commence le cégep. En effet, au secondaire, les étudiants sont amenés à travailler avec les pentes, les tangentes à des cercles, les coniques, les fonctions, ainsi qu'avec les systèmes d'équations. Les enseignants du groupe de recherche ARIM ont mentionné le fait que les étudiants pourraient même calculer la tangente à la fonction  $\sqrt{x}$  au complet par eux-mêmes, à l'aide d'outil d'expérimentation (GeoGebra, Desmos, etc) et de certains indices, lors d'une activité d'introduction au début du cours *Calcul Différentiel*.

Finalement, la lourdeur algébrique de cette méthode ainsi que le fait qu'elle ne s'applique

qu'aux polynômes pourrait être une bonne motivation pour la nécessité de développer un outil plus adapté aux calculs de dérivées : la limite. Les étudiants verraient donc mieux pourquoi il est si important de comprendre le concept de limite.

Les enseignants consultés dans le cadre de la rencontre s'entendaient tous pour dire que c'était une activité intéressante pour les points mentionnés précédemment. Ils étaient également enthousiastes à l'idée de l'essayer la prochaine fois qu'ils donneront le cours de calcul différentiel.

## Chapitre 4

# Le lien entre la tangente et l'aire sous la courbe

À ce point-ci dans l'histoire, la dernière chose qu'il manque pour parler d'un réel calcul différentiel et intégral, dans le sens où on l'entend de nos jours, est le lien entre les notions de « tangente à une courbe » et d'« aire sous une courbe ».

Le théorème fondamental du calcul est la pierre angulaire du calcul différentiel et intégral, car ce théorème donne explicitement un lien entre tangente et aire sous la courbe — entre dérivée et intégrale.

**Théorème 4.0.1** (Théorème fondamental du calcul). *Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et  $a \in I$ . Soit  $F(x)$  la fonction qui correspond à l'aire sous la courbe  $f$  entre  $a$  et  $x$ , c'est-à-dire*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

*Alors  $F'(x) = f(x)$ .*

Ainsi, on a que la pente de la tangente à la courbe représentant la fonction  $F(x)$ , donnant l'aire sous la courbe  $f(x)$ , est en fait la fonction  $f(x)$  elle-même.

Un corollaire très important de ce théorème est le résultat suivant, permettant de calculer l'aire sous une courbe sur un certain intervalle.

**Théorème 4.0.2.** *Soit  $f(x)$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et  $F(x)$  une primitive de  $f(x)$  — c'est-à-dire une fonction telle que  $F'(x) = f(x)$ . Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ce théorème est beaucoup utilisé dans le cours de calcul intégral au cégep, et est en fait même très souvent présenté comme étant le théorème fondamental du calcul.

Bien que la preuve du [théorème 4.0.2](#) découle automatiquement du [théorème 4.0.1](#), la preuve de ce dernier n'est pas aussi simple. Avant d'arriver à la première version du théorème fondamental du calcul, reculons un peu dans le temps afin de trouver les premiers liens entre tangente et aire sous la courbe.

## 4.1 Les mouvements uniformément difformes

Avant d'avoir un lien clair entre l'aire sous la courbe et la tangente, plusieurs mathématiciens avaient dégagé à tout le moins une idée intuitive de la relation entre ces deux objets à l'aide du concept de vitesse et de mouvement.

### 4.1.1 Nicole Oresme

Le mathématicien français du 14<sup>e</sup> siècle Nicole Oresme est l'un des premiers à avoir défini et étudié le mouvement *uniformément difforme* — ce qu'on appelle aujourd'hui mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA) en physique mécanique. Voici la définition qu'il en donnait.

**Définition 4.1.1.** L'altitude est appelée uniformément difforme (Figure 4.1) si chaque altitude équidistante, dans un groupe d'au minimum trois altitudes, excède l'autre dans une progression arithmétique, c'est-à-dire, si la seconde est plus grande que la première de la même quantité que la troisième est plus grande que la seconde; de cela on tire que la ligne reliant les sommets est une droite non parallèle à la base. (Struik, 1969, p. 135)

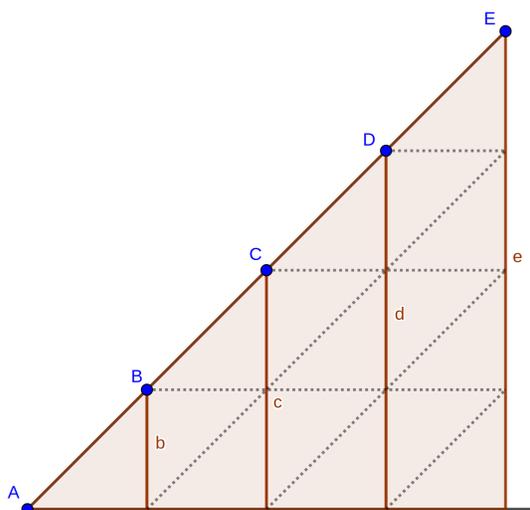


FIGURE 4.1 – Les altitudes A, B, C, D et E formant une altitude uniformément difforme

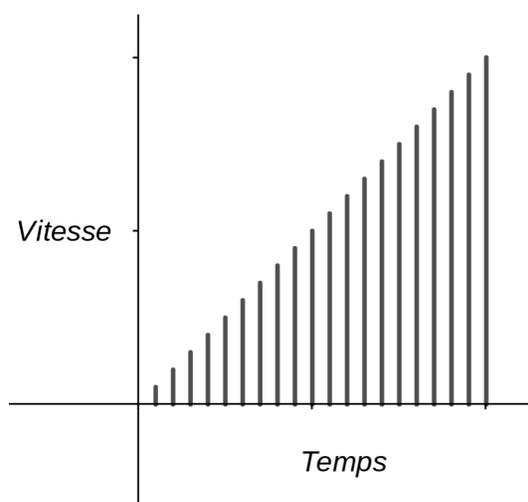


FIGURE 4.2 – La représentation d'Oresme pour le mouvement uniformément difforme

Ainsi, pour représenter un mouvement uniformément difforme, Oresme traçait une altitude pour chaque moment, comme à la Figure 4.2. C'est grâce à cette représentation qu'il s'est convaincu que la distance parcourue pendant un certain intervalle de temps correspondait à l'aire sous la courbe représentant la vitesse. Cela correspond de nos jours à un résultat classique de physique mécanique qui dit que l'aire sous la fonction vitesse est égale au déplacement, car la vitesse est la dérivée de la position. Soit en effet  $s(t)$  la position et  $v(t)$  la vitesse, on a

$$s(t) = \int_a^t v(x)dx$$

et donc la distance parcourue entre le temps  $t = a$  et  $t = b$  est

$$\int_a^b v(x)dx = s(b) - s(a).$$

Même s'il n'était pas arrivé à une telle conclusion, Oresme avait toutefois remarqué que s'il divisait l'aire sous la courbe en sections égales, comme les triangles à la [Figure 4.1](#), alors la distance parcourue était de 1 unité en une seconde, de 4 unités en deux secondes, de 9 unités en trois secondes, etc. Ainsi, il en concluait que c'était toujours un nombre carré et donc que le déplacement est proportionnel au carré du temps.

### 4.1.2 Galileo Galilei

Deux siècles plus tard, l'Italien Galileo Galilei (1564-1642) arrive au même résultat qu'Oresme, mais cette fois en effectuant des expériences sur un plan incliné. En prenant pour unité de référence la distance parcourue lors du premier intervalle de temps, il obtient expérimentalement la même relation qu'Oresme, c'est-à-dire

$$s(t) = kt^2. \text{ (Ross (2007))}$$

On remarque que cette formule est en accord avec les formules communément enseignées en physique mécanique, où  $k$  est remplacé par  $\frac{1}{2}a$ . L'accélération étant constante dans un contexte de MRUA, on retrouve bel et bien le  $k$ .

Galilei a également développé une théorie basée sur des indivisibles lui permettant de fonder ses données expérimentales sur une certaine théorie, bien les utilisations d'indivisibles ne soient pas rigoureuses. ([Struik, 1969](#), p. 208)

Toutefois, plusieurs questions restent ouvertes, par exemple qu'en est-il pour un mouvement qui n'est pas uniformément accéléré ? Est-ce que le déplacement est encore égal à l'aire sous la courbe ? Comment trouver cette aire ? Ce sont des questions plus générales qui seront résolues dans le siècle qui suit à l'aide du calcul différentiel et intégral.

## 4.2 Lien entre logarithme et aire sous l'hyperbole

L'invention des logarithmes a certainement aidé l'avancement des mathématiques au fil des années qui ont suivi. Par exemple, les tables de logarithmes de John Napier (1550-1617) et de Henry Briggs (1556-1630) ont particulièrement simplifié les calculs de grands nombres. Dans cette section, nous nous intéressons plutôt à un lien intéressant qu'a découvert le mathématicien belge Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667). Publiée en 1647, cette découverte donne une propriété particulière de l'aire sous l'hyperbole  $xy = 1$ . C'était la première étape vers le lien entre l'aire sous l'hyperbole et les logarithmes.

**Théorème 4.2.1.** *Étant donné l'hyperbole  $xy = 1$ , soit  $A_{a,b}$  l'aire de la région hyperbolique entre  $a$  et  $b$ , deux nombres strictement positifs. Soit de plus  $t > 0$ ; alors*

$$A_{ta,tb} = A_{a,b}$$

Voici la preuve de ce théorème donnée par (Edwards, 2012, p. 154). Il est à noter que ce dernier ne précise pas s'il s'agit de la preuve de Saint-Vincent ou bien d'une preuve moderne.

*Démonstration*

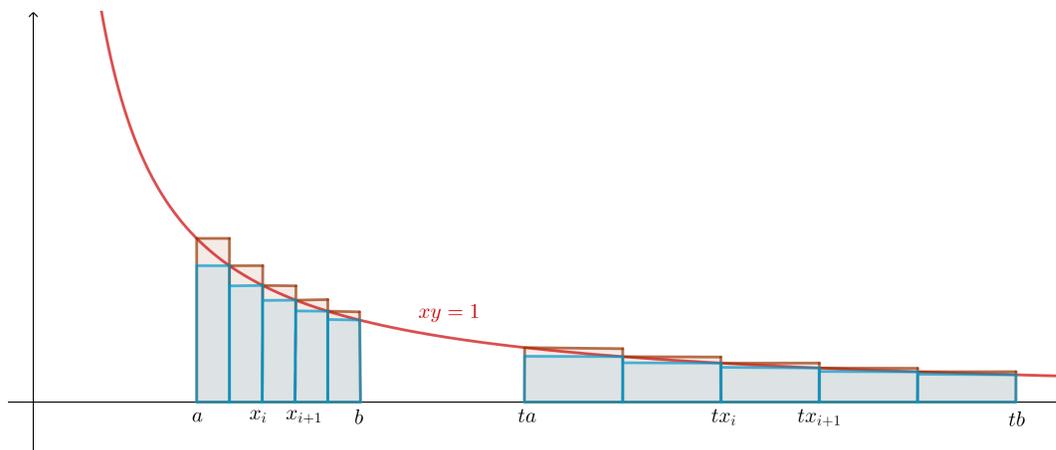


FIGURE 4.3 – Les rectangles inscrits et circonscrits aux intervalles  $[a, b]$  et  $[ta, tb]$

Commençons par couper un certain intervalle  $[a, b]$  en un certain nombre  $n$  de rectangles

circonscrits (en brun) et inscrits (en bleu) de même base. De la même façon, coupons l'intervalle  $[ta, tb]$  dans le même nombre de rectangles. (Figure 4.3)

Les rectangles sur l'intervalle  $[a, b]$  ont alors une base de  $\frac{b-a}{n}$  et une hauteur de  $\frac{1}{x_{i+1}}$  ou de  $\frac{1}{x_i}$  respectivement pour les rectangles inscrits et circonscrits. Ainsi, on voit que l'aire sous la courbe au-dessus de l'intervalle  $[a, b]$  est borné inférieurement et supérieurement par

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{nx_{i+1}} \leq A_{a,b} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{nx_i}.$$

De la même façon, les rectangles sur l'intervalle  $[ta, tb]$  ont une base de  $\frac{tb-ta}{n}$  et une hauteur de  $\frac{1}{nx_{i+1}}$  et de  $\frac{1}{nx_i}$ . Ainsi,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{tb-ta}{tnx_{i+1}} \leq A_{ta,tb} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{tb-ta}{tnx_i}.$$

Or, on peut remarquer que les sommations qui encadrent  $A_{a,b}$  et  $A_{ta,tb}$  sont les mêmes, car dans les secondes les  $t$  se simplifient au numérateur et au dénominateur. Ce faisant, les aires  $A_{a,b}$  et  $A_{ta,tb}$  n'auront pas le choix d'être égales, car plus  $n$  devient grand, plus les sommations encadrent  $A_{a,b}$  et  $A_{ta,tb}$  de proche.

On trouve donc que  $A_{a,b} = A_{ta,tb}$ . ■

Un peu plus tard, en lisant les travaux de Saint-Vincent, un de ses collègues, Alphonse Antonio de Sarasa (1618-1667), réalisa que le [théorème 4.2.1](#) permettait de prouver que l'aire sous l'hyperbole partageait une propriété particulière avec les logarithmes en général. <sup>1</sup>

**Théorème 4.2.2.** *Posons*

$$L(x) = \begin{cases} A_{1,x} & \text{si } x \geq 1 \\ -A_{x,1} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

---

1. Du temps de Sarasa, les logarithmes de Briggs, c'est-à-dire en base 10, étaient déjà connus, tout comme les logarithmes de Napier.

alors  $L(xy) = L(x) + L(y)$ .

Ce théorème est donné ici dans une écriture très moderne. Pour Sarasa, il répond à une question particulière qu'il tentait de résoudre.

*Given three magnitudes,  $A$ ,  $B$ , and  $C$ , which can be shown in one and the same geometric progression, and given the logarithms of two of these magnitudes, say those of  $A$  and  $B$ , to determine the logarithm of the third,  $C$ , geometrically.*

(González-Velasco, 2011, p. 119)

Sarasa cherche alors à trouver le logarithme en base dix de  $C$ , sachant que  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont en progression géométrique et en connaissant le logarithme en base dix de deux de ces nombres. C'est dans cette optique qu'il trouve le [théorème 4.2.2](#). Nous n'expliquerons pas comment ce théorème permet de résoudre le problème ; toutefois, le lecteur désirant en savoir plus peut consulter (González-Velasco, 2011, p. 120).

Ce qui nous intéresse ici est le lien que Sarasa fait entre l'aire sous la courbe et la notion de logarithme. En effet, dans sa recherche de solution, le [théorème 4.2.1](#) l'amène à conclure le lien entre les aires sous l'hyperbole  $xy = 1$  et les logarithmes.

*Whence these areas can fill the place of the given logarithms.* (González-Velasco, 2011, p. 120)

*Démonstration*

Pour démontrer le [théorème 4.2.2](#), il y a quatre cas à traiter, selon l'ordre dans lequel se trouvent  $x$ ,  $y$ ,  $xy$  et 1. Nous démontrons deux cas ici : les autres se démontrent de la même façon et sont laissés en exercices au lecteur.

**Cas  $1 < x < y < xy$  :**

Comme  $xy > 1$ , on a que  $L(xy) = A_{1,xy}$ . De plus, en séparant l'aire en deux morceaux, on peut écrire  $A_{1,xy} = A_{1,x} + A_{x,xy}$ . Finalement, par le [théorème 4.2.1](#) on trouve que  $A_{x,xy} = A_{1,y}$  avec  $t = x$ . Ainsi, on a

$$L(xy) = A_{1,xy} = A_{1,x} + A_{x,xy} = A_{1,x} + A_{1,y} = L(x) + L(y).$$

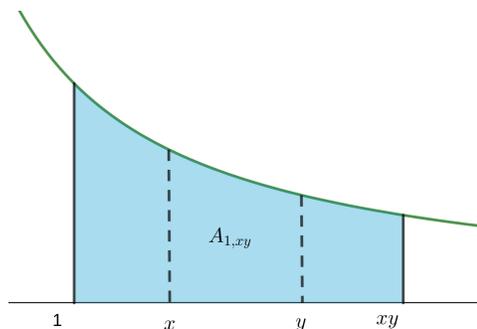


FIGURE 4.4 – Cas  $1 < x < y < xy$

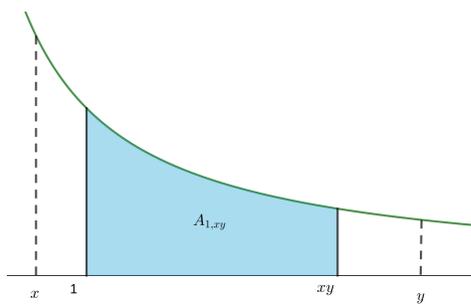


FIGURE 4.5 – Cas  $0 < x < 1 < xy < y$

**Cas**  $0 < x < 1 < xy < y$  :

On a maintenant que

$$L(xy) = A_{1,xy} = A_{1,y} - A_{xy,y} = A_{1,y} - A_{x,1} = L(y) + L(x)$$

■

On peut donc voir que l'aire sous la courbe est en fait un logarithme, car elle agit exactement de la même façon que ceux-ci. Toutefois, Sarasa ne savait pas de quel logarithme il s'agissait ; nous l'appellerons ici (temporairement), tout comme ([González-Velasco \(2011\)](#)), le logarithme hyperbolique. On peut tout même remarquer que  $L(1) = 0$ , ce qui est une propriété que le logarithme hyperbolique partage avec le logarithme défini par Henry Briggs (1556-1630) en 1615, qui est maintenant notre logarithme en base 10.<sup>2</sup> Toutefois, en faisant des approximations de l'aire sous l'hyperbole et des calculs de logarithmes, on réalise que le logarithme hyperbolique et le logarithme en base 10 ne sont pas les mêmes.

Pour savoir de quel logarithme il s'agit réellement, il faudra attendre la venue de Leonhard Euler (1707-1783), pratiquement un siècle plus tard. Nous pouvons néanmoins, à l'aide d'outils modernes, trouver le logarithme en question, comme le fait Edwards. ([Edwards, 2012](#), p. 157)

<sup>2</sup>. Il est à noter que cette propriété n'est pas partagée par le logarithme original de Napier pour lequel c'est plutôt le logarithme de  $10^7$  qui vaut 0.

Premièrement, on sait que

$$L'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(x+h) - L(x)}{h}$$

Or, en utilisant le [théorème 4.2.1](#), et la définition de  $L(x)$ , on trouve

$$L(x+h) - L(x) = A_{1,x+h} - A_{1,x} = A_{x,x+h} = A_{1,1+\frac{h}{x}} = L\left(1 + \frac{h}{x}\right).$$

Ainsi, en multipliant par  $\frac{x}{x}$  et en posant  $k = \frac{h}{x}$ , on obtient

$$\begin{aligned} L'(x) &= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} x \frac{L\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{L(1+k)}{k} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{L(1+k) - L(1)}{k} \\ &= \frac{L'(1)}{x} \end{aligned}$$

Remarquons que comme  $L(1) = 0$ , nous pouvons soustraire cette quantité de l'avant-dernière ligne afin de retrouver l'expression de la dérivée.

Il faut maintenant trouver la valeur de  $L'(1)$  — qui vaut <sup>3</sup>

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(1+h) - L(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(1+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A_{1,1+h}}{h}.$$

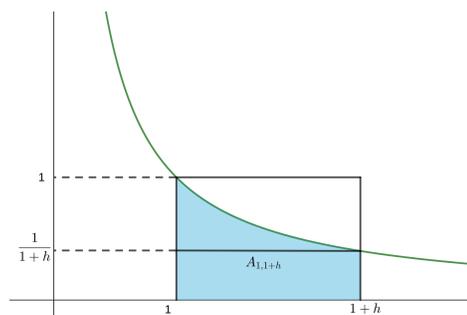


FIGURE 4.6 —  $L(1+h)$ , ou  $A_{1,1+h}$

En regardant la [Figure 4.6](#). On remarque que  $A_{1,1+h}$  est contenue dans le rectangle de base  $h$

---

3. Nous démontrerons que c'est le cas pour un  $h \rightarrow 0+$ , la démonstration pour  $h \rightarrow 0-$  est pratiquement la même.

et de hauteur 1, et contient le rectangle de hauteur  $\frac{1}{1+h}$  et de base  $h$ . Ainsi,

$$\frac{h}{1+h} \leq A_{1,1+h} \leq h,$$

de sorte que

$$\frac{1}{1+h} \leq \frac{A_{1,1+h}}{h} \leq 1.$$

Finalement, lorsque  $h$  tend vers 0, on trouve que  $L'(1) = 1$ .

La dérivée de  $L(x)$  est donc  $\frac{1}{x}$ , tout comme la dérivée de la fonction  $\ln(x)$ . De plus, on a  $L(1) = \ln(1)$ , et donc on a que le logarithme hyperbolique est en fait nul autre que le logarithme naturel  $\ln x$ , par l'unicité de la solution de l'équation différentielle à la condition initiale

$$\begin{cases} L'(x) = \frac{1}{x} \\ L(1) = 0. \end{cases}$$

### 4.3 Un théorème (géométrique) fondamental du calcul

Jusqu'ici, nous avons exploré que des cas particuliers de liens entre aire sous la courbe et tangente ou fonctions connues. La première preuve d'un lien entre la pente de la tangente et l'aire sous une courbe quelconque est donnée par Isaac Barrow (1630-1677), un mathématicien anglais, lors de ses années en tant que professeur à l'Université de Cambridge de 1662 à 1670. Il fut également le premier à occuper la chaire de professeur lucasien, chaire qui fut ensuite occupée par Isaac Newton et, plus récemment, par Stephen Hawking.

Lors de son passage à Cambridge, Barrow présente ses « *Lectiones geometricae* »<sup>4</sup>, un recueil de treize présentations portant surtout sur la recherche de tangentes, d'aires sous des courbes et de longueurs d'arcs.

---

4. Latin pour « Leçons de géométrie »

Barrow, tout comme Fermat, utilisait une méthode pour trouver des tangentes basée sur des infinitésimaux. Nous nous intéressons ici plutôt au contenu de sa dixième présentation, où se trouve son résultat 11 que nous traduisons ci-dessous de (Struik, 1969, p. 255).

**Théorème 4.3.1.** Soit  $ZGE$  (Figure 4.7) une courbe quelconque dont l'axe est  $VD$ , et soit des ordonnées perpendiculaires à cet axe ( $VZ$ ,  $PG$ ,  $DE$ ) augmentant continuellement à partir de l'ordonnée initiale  $VZ$ . Soit aussi  $VIF$ , une courbe telle que — si une ligne droite  $EDF$  est tracée perpendiculairement à  $VD$  coupant les courbes aux points  $E$  et  $F$  et coupant  $VD$  en  $D$  — le rectangle contenu par  $DF$  et une certaine longueur  $R$  est égal à l'espace contenu dans  $VDEZ$ . Supposons de plus que  $DE : DF = R : DT$ , et joignons  $[T$  et  $F]$ . Alors  $TF$  touchera la courbe  $VIF$ .<sup>5</sup>

Avant de se lancer dans la démonstration, il semble approprié de comprendre pourquoi on associe ce résultat avec le théorème fondamental du calcul. En effet, à première vue, ces derniers ne se ressemblent pas vraiment. Toutefois, lorsqu'on interprète les écrits de Barrow correctement, on retrouve bien le lien entre la tangente et l'aire sous la courbe. Du moins, la tangente telle que définie par les Grecs comme étant la droite ne touchant la courbe qu'en un seul point tout en restant du même côté.

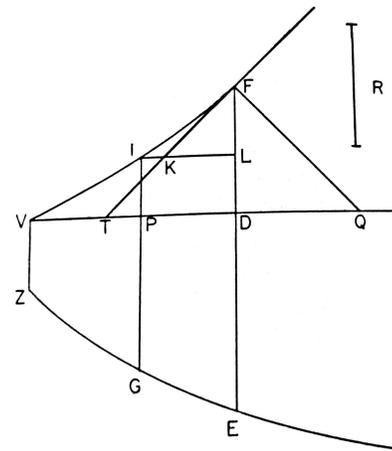


FIGURE 4.7 – Le théorème de Barrow (Struik, 1969, p. 256)

Premièrement, nous nommons la courbe  $ZGE$  comme étant la fonction  $f$ . Cette fonction doit être une fonction croissante, comme l'indique le fait que les ordonnées  $VZ$ ,  $PG$  et  $DE$  sont de plus en plus grandes. Barrow utilise ensuite cette fonction quelconque pour définir la courbe  $VIF$ , que nous nommons  $A$ ; cette fonction est en fait l'aire sous la courbe  $f$ .

5. Par « Alors  $TF$  touchera la courbe  $VIF$  », Barrow veut dire que  $TF$  restera du même côté de  $VIF$  et ne la touchera qu'en un seul point, le point  $F$ . C'est ce qu'il démontre.

En effet, lorsque Barrow dit que le rectangle contenu par  $DF$  et une certaine longueur  $R$  est égal à l'espace contenu dans  $VDEZ$ , il veut dire que l'aire sous la courbe  $f$  entre  $V$  et  $D$  est égale à la hauteur  $FD$ . La longueur  $R$ , qui est la même peu importe le point où on se trouve dans le graphique, agit ici comme unité de référence, comme une sorte de graduation de notre graphique si on veut l'interpréter ainsi. Cela permet à Barrow de comparer deux mesures d'aires ensemble plutôt qu'une longueur avec une aire. C'est toutefois sa seule utilité. D'ailleurs, dans la preuve du théorème par ([Edwards, 2012](#), p. 139-140), il ne tient pas compte du  $R$ , remplaçant ce dernier partout par 1. Pour la démonstration et la suite des explications, nous ferons la même chose afin de ne pas compliquer inutilement la notation.

Ainsi, si  $V$  est considérée comme l'origine, on a en notation moderne

$$A(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Finalement, Barrow affirme que la droite  $FT$ , où le point  $T$  satisfait la proportion  $DE : DF = R : DT$ , ne touche la courbe qu'en un seul point, soit le point  $F$ . La droite  $FT$  est alors la tangente à la courbe dans le sens grec du terme.

Posons maintenant  $x$  comme étant la distance entre le point  $V$  et le point  $D$ , la pente de la droite  $FT$  est alors

$$\frac{DF}{DT} = \frac{DF}{DF/DE} = \frac{A(x)}{A(x)/f(x)} = f(x).$$

On a donc en notation moderne

$$\frac{DF}{DT} = A'(x) = f(x),$$

ce qui est bien l'énoncé du théorème fondamental du calcul. Toutefois, Barrow l'interprète de façon purement géométrique, et non pas analytique. De plus, sa définition de tangente ne fait pas intervenir l'idée de taux de variation instantané, mais est plutôt la conception géométrique que les Grecs avaient de la tangente comme étant la droite ne touchant à la courbe qu'en un seul point et étant contenue du même côté de celle-ci.

Voyons (enfin !) la démonstration que Barrow donne de ce théorème.

*Démonstration :*

Dans l'optique de prouver que la droite  $TF$  ne touche à la courbe qu'en un seul point tout en étant contenue du même côté de la courbe, Barrow prouve que pour un certain point  $I$  sur la courbe  $VIF$ , alors l'intersection  $K$ , entre  $FT$  et la droite horizontale  $IL$ , est toujours à la droite de  $I$ . (Figure 4.7)

Prenons donc  $I$  un point à la gauche de  $F$ . (La démonstration se ferait de la même façon pour un point  $I$  à droite de  $F$ .)

Soit  $K$  l'intersection de  $TF$  avec la droite parallèle à  $DV$  au point  $I$ . Par le théorème de Thalès, comme les droites  $IK$  et  $DV$  sont parallèles, les côtés des triangles  $\Delta TFD$  et  $\Delta KFL$ , où  $L$  est l'intersection entre  $IK$  et  $FD$ , sont proportionnels. Ainsi,

$$\frac{LF}{LK} = \frac{DF}{DT}.$$

Or, on sait que  $\frac{DF}{DT} = DE$ , et donc  $LF = DE \cdot LK$ . De plus, étant donné que  $LF = DF - DL = DF - PI$ , et comme la courbe  $VIF$  représente l'aire sous la courbe  $ZGE$ , alors  $DF - PI$  représente l'aire du secteur  $PDEG$ . Comme la fonction est croissante, ce secteur est contenu dans le rectangle  $PD \cdot DE$ .

Ainsi, on a

$$DE \cdot LK = LF = \text{Aire de } PDEG < PD \cdot DE,$$

donc  $LK < PD = IL$ . Ce faisant, le point  $K$  est à droite du point  $I$ .

Comme mentionné précédemment, la même idée fonctionne pour  $I$  à droite de  $F$  et on arrive avec la même conclusion.

Finalement, comme  $K$  est toujours à droite de  $I$ , peu importe le  $I$ , on a que la droite  $TF$  est toujours à droite de la courbe et qu'elle y touche en un seul point, c'est-à-dire le point  $F$ . ■

Barrow mentionne que le théorème tient également pour une fonction décroissante, la seule différence est que la courbe  $VIF$  est alors une courbe concave, et que la tangente se situe à gauche de la courbe.

Ce théorème est le premier lien rigoureux entre l'aire sous la courbe et la tangente. Toutefois, on remarque qu'il possède une saveur beaucoup plus géométrique qu'analytique, tant dans son énoncé que dans sa démonstration. De plus, Barrow ne parle pas réellement de la tangente, et c'est pour cette raison qu'on attribue le théorème fondamental à Leibniz et à Newton.

## Chapitre 5

# Le passage du calcul géométrique au calcul analytique

Dans ce dernier chapitre, nous nous intéressons au calcul différentiel et intégral développé par le mathématicien allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Nous ne plongerons toutefois pas en profondeur dans ce calcul, ne voulant donner au lecteur qu'une brève idée de ce qu'est devenu le calcul grâce à Leibniz.

Ce sont les travaux de ce dernier qui ont ouvert la voie à un nouveau calcul qui, cette fois, est plus analytique que géométrique. La principale raison pour ce changement est la notation introduite par Leibniz, qui permet un raisonnement beaucoup moins géométrique que ces prédécesseurs.

Presqu'au même moment, Newton a, de son côté, également inventé un calcul différentiel. Pour sa part, il fondait son invention sur de ce qu'il appelait les *fluxions*. Newton voyait une fonction  $f(x, y) = 0$  comme étant l'intersection d'une droite horizontale et d'une droite verticale se déplaçant chacune à une certaine vitesse variable. En un certain sens, Newton définissait une courbe comme étant la composition de deux mouvements, soit un mouvement en  $x$  et un en  $y$ . Ceci est dans le même ordre d'idée que la méthode de Roberval abordée à la [section 3.2](#), où il décomposait une courbe pour tracer ses tangentes. Les fluxions sont alors, dans un discours moderne, les dérivées de  $x$  et  $y$  par rapport au temps, soit  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  et  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ .

Nous ne nous intéresserons pas au calcul de Newton ici, le lecteur intéressé peut toutefois consulter le chapitre 8 de (Edwards (2012)) qui discute de ce sujet.

## 5.1 Le calcul de Leibniz

L'inspiration de Leibniz pour son calcul provient des travaux du mathématicien français Blaise Pascal (1623-1662). Dans l'une de ses lettres, ce dernier démontre la formule de l'aire d'une sphère en faisant tourner un quart de cercle autour de l'axe des  $x$ .

Pour ce faire, Pascal crée deux triangles rectangles semblables : le triangle  $E_1E_2K$ , où  $E_1E_2$  est la tangente au cercle au point  $D$ , et le triangle  $ADI$  où  $AD$  est le rayon du cercle. Il considère ensuite le triangle  $E_1E_2K$  comme un « triangle infinitésimal » afin que le côté  $E_1E_2$  corresponde exactement à un morceau du cercle. Puis, en utilisant les proportions des triangles, en sommant tous les indivisibles, et en faisant tourner le quart de cercle autour de l'axe des  $x$ , Pascal arrive à la formule bien connue  $A = 4\pi r^2$  pour l'aire de la sphère. ((Edwards, 2012, p. 240))

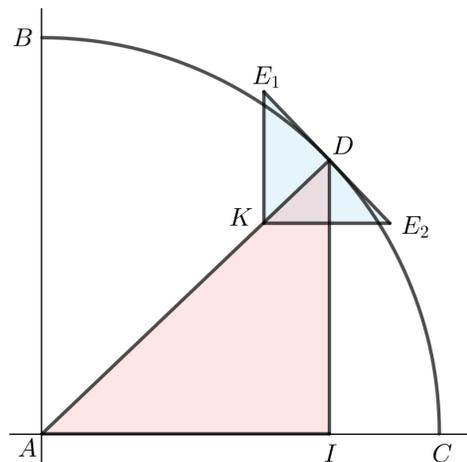


FIGURE 5.1 – *Les triangles de Pascal*

Leibniz décide d'utiliser cette idée de triangles semblables, qu'il appelle « triangles caractéristiques », pour une courbe quelconque. (Figure 5.2) Pour ce faire, il remplace le rayon du cercle par la normale à la courbe et obtient deux triangles rectangle semblables : le premier, un triangle infinitésimal formé des segments  $ds$ ,  $dx$  et  $dy$  et le second formé par l'ordonnée  $y$  et la normale. En utilisant ces triangles caractéristiques, dans différents contextes, Leibniz pourra, entre autres, calculer des longueurs de courbes et transformer des problèmes d'aires en problèmes de tangentes.

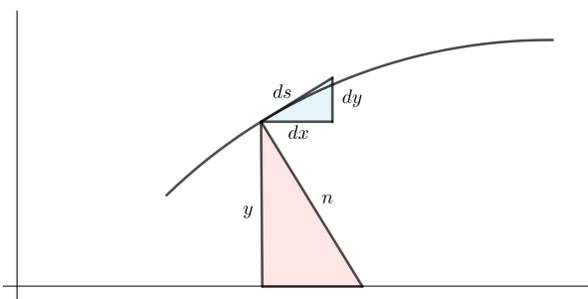


FIGURE 5.2 – Les triangles de Leibniz

L'idée générale du calcul de Leibniz est de couper une courbe en une infinité de points en  $x$  et en  $y$ . Chaque point en  $x$  est alors associé avec son équivalent en  $y$  et la différence entre deux points est plus petite que n'importe quelle quantité *assignable*, comme le dit Leibniz. De nos jours, on parlerait de quantités infinitésimales, ce

sont nos  $dx$  et  $dy$ . Leibniz ne s'arrête pas à se demander si de telles quantités existent, mais il les utilise comme des outils afin d'arriver à des résultats valides.

À partir de ces quantités, il peut ainsi calculer tangentes et aires. En effet, pour trouver des tangentes, il ne fait que des différences entre deux points consécutifs afin de calculer des pentes, et pour calculer des aires, il ne fait que des sommes afin de remplir toute la région qui l'intéresse.

Dans ses premières notes sur le calcul différentiel, sa notation diffère un peu de celle qu'on connaît aujourd'hui. Lorsqu'il effectue une somme, il utilise le symbole « *omn.* », diminutif du latin *omnia* qui signifie « toute chose ». Ainsi, l'un de ses premiers résultats s'écrit comme suit :

$$\frac{\overline{\text{omn. } l^2}}{2} = \text{omn.} \frac{\overline{l}}{\overline{\text{omn. } l a}}$$

Leibniz utilise ici des barres horizontales plutôt que des parenthèses et les  $l$  sont des séquences de différences entre deux  $y$  ou  $x$  consécutifs. De plus, la constante  $a$  est probablement introduite pour préserver l'homogénéité et comparer des aires avec des aires et non pas avec des longueurs, comme la constante  $R$  de Barrow au précédent chapitre. En langage moderne, ce résultat est donc

$$\frac{1}{2} \left( \int dy \right)^2 = \int \left( \int dy \right) dy,$$

ou encore,

$$\frac{y^2}{2} = \int y \, dy.$$

Rapidement, Leibniz introduit le symbole d'intégrale en mentionnant tout simplement qu'il sera utile d'écrire  $\int$  plutôt que « omn ». Puis, il utilise  $\frac{y}{d}$  plutôt que  $l$  afin de parler d'une différence en  $y$ . Cette notation représente une certaine distance en  $y$  brisée en un certain nombre  $d$  de morceaux. Plus  $d$  devient grand, plus  $\frac{y}{d}$  devient petit. Quelques jours plus tard, Leibniz décide plutôt d'utiliser le bien connu  $dy$  pour représenter une différence infinitésimale en  $y$ .

On peut voir, dans les travaux de Leibniz, les formules usuelles de dérivation d'un produit, d'un quotient, et d'une longueur de courbe. On peut également y retrouver l'identité d'intégration par parties et le fameux théorème fondamental du calcul.

## 5.2 Le théorème fondamental du calcul de Leibniz

Ce qu'on connaît aujourd'hui sous le nom de « Théorème fondamental du calcul » se retrouve dans un document publié par Leibniz en 1693. Dans celui-ci, il explique comment calculer l'aire sous une courbe  $z$  en utilisant ce qu'il appelle la *quadratrice*<sup>1</sup>; ce que nous appelons communément la primitive, c'est-à-dire une courbe  $y$  telle que  $\frac{dy}{dx} = z$ .

La preuve de ce théorème ne sera pas faite au complet ici, mais se retrouve dans (Struik, 1969, p. 283). On y retrouve un mélange de géométrie et des règles analytiques de calcul que Leibniz a inventées pour son calcul différentiel. Voici l'idée générale du processus de Leibniz pour trouver l'aire sous une courbe.

Il commence en supposant qu'il connaît une courbe  $y = C(C')$  sur la [Figure 5.3](#) — qui

---

1. À l'époque, une quadratrice était une courbe utilisée pour obtenir l'aire délimitée par une courbe donnée. La quadratrice d'Hippias à la [sous-section 2.1.1](#) est d'ailleurs utilisée pour effectuer la quadrature d'un cercle, c'est-à-dire pour construire un carré ayant la même aire qu'un cercle donné.



L'ordonnée de la fonction  $y$  au point  $x_0$ , multipliée par sa constante  $a$ , lui donne alors l'aire sous la fonction  $z$  entre l'origine et le point  $x_0$ . Ainsi, pour trouver l'aire entre les points  $x_0$  et  $x_1$ , il n'a qu'à soustraire l'aire entre  $[0, x_0]$  et  $[0, x_1]$ . En prenant  $a = 1$ , cela donne

$$\int_{x_0}^{x_1} z \, dx = y(x_0) - y(x_1).$$

On voit bien que la méthode de Leibniz pour trouver l'aire sous une courbe a encore une certaine saveur géométrique. Bien qu'il ait une notation et un calcul formel de défini, il a tout de même besoin d'une représentation géométrique de la courbe afin de déterminer certaines proportions. C'est une fois ces proportions obtenues qu'il utilise le calcul qu'il a développé afin de passer de ces proportions à l'aire sous la courbe par l'intermédiaire des intégrales.

### 5.3 La notation de Leibniz

La raison pour laquelle nous nous intéressons plus particulièrement au calcul de Leibniz dans ce présent chapitre est l'influence énorme qu'a eu sa notation dans l'univers des mathématiques. Encore aujourd'hui, par exemple, on utilise la notation de Leibniz pour enseigner le calcul différentiel et intégral au cégep.

Pour sa part, Gottfried Wilhelm Leibniz n'a pas commencé sa carrière de mathématicien très jeune, étudiant plutôt la logique, la philosophie et le droit à l'université. C'est à vingt-six ans, alors qu'il était à Paris pour une mission diplomatique, que Leibniz a commencé à s'intéresser de façon sérieuse aux mathématiques. Ce fut pendant ces années passées à Paris qu'il a développé son calcul différentiel.

Sa motivation première était de créer un système de notation et de terminologie qui permettrait de raisonner de façon parfaite peu importe la discipline. On pourrait ainsi décider de la validité de toute proposition en la démontrant, de la même façon qu'on fait une preuve mathématique.

Lorsqu'on regarde aujourd'hui la notation qu'il a créée, on peut voir qu'il a bel et bien atteint son but pour les mathématiques. De plus, les conséquences de ce langage vont plus loin que seulement permettre un raisonnement formel. À ce sujet, (Edwards, 2012, p. 232) dit de Leibniz :

*« His infinitesimal calculus is the supreme example, in all of science and mathematics, of a system of notation and terminology so perfectly mated with its subject as to faithfully mirror the basic logical operations and processes of that subject. It is hardly an exaggeration to say that the calculus of Leibniz brings within the range of an ordinary student problems that once required the ingenuity of an Archimedes or a Newton. »*

Malheureusement, c'est seulement en mathématiques que Leibniz a atteint son but.

### 5.3.1 La notation différentielle de Leibniz

Lorsqu'on regarde la notation différentielle qu'a inventée Leibniz, on se rend compte qu'elle est encore utilisée de nos jours, car elle permet de faire exactement ce que Leibniz voulait : elle permet de guider l'esprit afin d'arriver à des résultats corrects. Voici un exemple qui illustre bien ces propos. Nous pouvons écrire le théorème suivant à l'aide de deux notations, soit celle de Leibniz et celle de Lagrange.

**Théorème 5.3.1** (Dérivation en chaîne - Notation de Lagrange). *Soit  $f(x)$  et  $g(x)$  deux fonctions dérivables dont l'image de  $g(x)$  appartient au domaine de  $f(x)$ . Soit  $h(x) = f(g(x))$ . Alors*

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

**Théorème 5.3.2** (Dérivation en chaîne - Notation de Leibniz). *Soit  $z = f(y)$  et  $y = g(x)$  deux fonctions dérivables. Alors*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

On remarque que dans la version de Lagrange, il n'y a aucune intuition derrière la formule. Il faut seulement se rappeler de multiplier par la « dérivée de l'intérieur ». Dans la notation de Leibniz, il est facile d'avoir rapidement une intuition de la validité de cette formule. C'est comme si les  $dy$  étaient des nombres et s'annulaient pour donner simplement  $\frac{dz}{dx}$ . C'était d'ailleurs l'idée de Leibniz, soit que les symboles  $dx$  et  $dy$  représentaient des quantités infinitésimales qu'il pouvait manipuler comme des nombres réels — bien qu'elles soient plus petites que toute quantité assignable.

Il existe plusieurs autres exemples du fait que la notation de Leibniz guide l'esprit, on peut penser à la fameuse formule de changement de variable.

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Si on fait le changement de variable  $u = g(x)$ , alors  $\frac{du}{dx} = g'(x)$  et donc si on considère  $du$  et  $dx$  comme étant des quantités, on trouve  $du = g'(x)dx$ . Ce faisant, il est très facile de se souvenir du résultat.

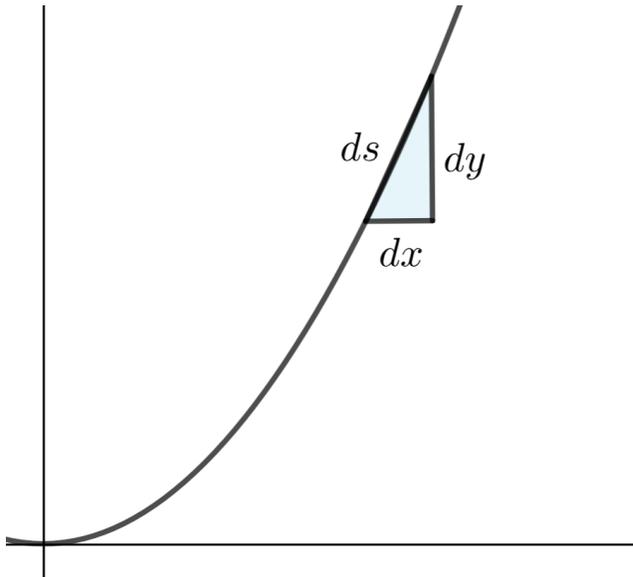


FIGURE 5.4 – Un triangle caractéristique de Leibniz

Pour terminer, on pourrait également s'intéresser au calcul de longueur d'un arc de courbe. On peut remarquer qu'un petit élément de courbe est représenté par  $ds$ . Or,  $ds$  représente l'hypoténuse du triangle rectangle dont les deux cathètes sont  $dx$  et  $dy$ . Ainsi, par le théorème de Pythagore, on obtient

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

En mettant un  $dx$  en évidence dans le terme de droite, on trouve

$$ds = \sqrt{(dx)^2 \left( 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right)} = \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} dx.$$

Ainsi, pour trouver la longueur  $L$  de la courbe, il ne reste qu'à additionner tous les morceaux  $ds$ . C'est-à-dire

$$L = \int ds = \int \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} dx.$$

Tous ces exemples montrent bien à quel point la notation de Leibniz permet de guider l'esprit vers des résultats corrects, même si les démonstrations rigoureuses de ces résultats nécessitent un peu plus de travail. C'est cette possibilité de manipulation et d'intuition qui a fait que la notation de Leibniz est devenue si populaire et qu'elle est toujours utilisée couramment de nos jours.

### **5.3.2 Parenthèse pédagogique : La notation, un outil nécessaire à la compréhension**

Pour plusieurs étudiants de niveau collégial, la notation est un aspect des mathématiques qu'ils négligent. Souvent, leur seule raison de bien utiliser la notation est de ne pas perdre de point à l'examen ; malheureusement, c'est une pratique que renforcent plusieurs enseignants en n'expliquant pas pourquoi il est important de bien écrire les choses.

Une illustration classique de ce phénomène se retrouve dans la manipulation de limites.

Considérons par exemple le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x - 2} \\ &= \frac{0}{-1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Plusieurs étudiants vont oublier de réécrire le « lim » après la première étape et ainsi perdre des points. D'autres au contraire, conserveront la limite pendant une étape de trop et perdront également des points. Toutefois, la raison pour laquelle on conserve ou enlève le symbole « lim » n'est pas seulement « parce que c'est la règle et que sinon on perd des points ». Il y a une raison logique derrière tout ça que les étudiants devraient connaître et comprendre.

En effet, la limite est un opérateur. Ainsi, si on ne fait que transformer l'expression sur laquelle on veut appliquer notre opérateur, on doit conserver le symbole « lim ». Puis, lorsqu'on applique cet opérateur, on n'écrit plus la limite, car celle-ci a été calculée. C'est comme si un étudiant écrivait  $\sqrt{4} = \sqrt{2}$  ou bien encore  $\sqrt{2+2} = 4 = 2$ , ce qui semble évidemment improbable, car les étudiants maîtrisent habituellement cette notation. La notation de la limite, pour sa part, est nouvelle et n'est pas toujours bien comprise par les étudiants.

Cet exemple n'en est qu'un parmi tant d'autres concernant l'enseignement du calcul différentiel et intégral. On peut également penser au fameux  $dx$  devant se trouver dans chaque intégrale, au changement de la constante d'intégration lors des différentes étapes de la résolution d'équations différentielles, ou encore plus simplement au symbole « = » qui doit refléter une égalité entre deux expressions et non seulement être un symbole permettant de passer à une autre étape.

Toutes ces notations en mathématiques servent à créer un nouveau langage qui permet de s'y

retrouver avec aisance et de pouvoir trouver de nouveaux résultats à partir de résultats déjà connus. On peut d'ailleurs remarquer que les mathématiques ont énormément évolué à partir du moment où les mathématiciens ont introduit une notation qui permettait une meilleure formalisation, comme vu à la [section 2.2](#). La notation de Leibniz a également fortement contribué au développement du calcul différentiel et intégral, tel que discuté à la [section 5.3](#).

Les exemples donnés à la [sous-section 5.3.1](#) illustrent à quel point une bonne notation permet de se rappeler efficacement de certains théorèmes et de les comprendre intuitivement. Les trois façon de retrouver les formules figurant dans cette section proviennent de ([Edwards, 2012](#), p. 232); toutefois ce sont des techniques que j'avais personnellement, avant même de les lire dans Edwards, utilisées à de nombreuses reprises afin de faire comprendre à un étudiant le changement de variable ou encore la dérivation en chaîne. La notation de Leibniz est également un outil que j'utilise encore aujourd'hui afin de me rappeler la formule permettant de calculer la longueur de courbe.

Pour toutes ces raisons, il semble important que la notation ne soit pas pour les étudiants seulement un ensemble de règles à appliquer pour ne pas perdre des points, mais bien un outil important permettant d'améliorer la compréhension. Les étudiants doivent cesser de voir la notation comme un obstacle, mais plutôt commencer à y voir un nouveau langage qui leur permet de bien comprendre le monde mathématique. Au final, c'est ce puissant outil qui a permis au calcul différentiel et intégral de se transformer d'un calcul géométrique, à un calcul analytique.

# Conclusion

Tout comme un point de départ a dû être choisi pour cet essai, la même chose a dû être faite quant au choix de la fin de notre parcours historique. La décision de terminer avec le théorème fondamental de Leibniz semblait s'imposer par elle-même, en raison de la composante géométrique qui est à la base de cet essai. Ma principale motivation ici était de m'intéresser à la présence de la géométrie comme outil afin de faire avancer les mathématiques — présence de la géométrie dans des situations qui sont, par la suite, devenues principalement algébriques ou analytiques. Le calcul de Leibniz marque le début d'un calcul analytique plutôt que géométrique, bien que la géométrie soit encore présente dans ses méthodes.

Le calcul différentiel et intégral a beaucoup évolué entre les travaux de Leibniz et l'enseignement qu'on fait de cette branche des mathématiques au cégep de nos jours. On pourrait penser à la formalisation de l'analyse par Augustin Louis Cauchy (1789-1857) et Karl Weierstrass (1815-1897), ou encore à l'analyse non-standard d'Abraham Robinson (1918-1974) qui permet maintenant l'utilisation rigoureuse du calcul infinitésimal. Ces nouveaux développements sont toutefois moins géométriques que ceux dont il était question dans ce travail.

Si le but premier était de s'intéresser à l'apport de la géométrie dans l'histoire du calcul différentiel et intégral, il ne faudrait pas non plus oublier la composante pédagogique. Comme cet essai a été écrit dans le cadre d'une maîtrise en mathématiques avec concentration enseignement des mathématiques, il y avait également une forte motivation pédagogique. Personnellement, je trouve que tout enseignant de mathématiques gagne à

connaître l'histoire de celles-ci pour toutes les raisons citées dans [l'introduction](#), mais également car elle permet de mieux comprendre certains obstacles de compréhension des étudiants actuels, car ils étaient également des obstacles pour les mathématiciens à l'époque. Ces *obstacles épistémologiques*, tels que définis par ([Sierpiska \(1985\)](#)), doivent être surmontés et jouent un rôle fondamental dans la compréhension des mathématiques. Les étudiants doivent être confrontés à certains obstacles afin de cheminer dans leur compréhension, et ces obstacles sont souvent liés à ceux rencontrés historiquement par les mathématiciens. Ainsi, la connaissance de l'histoire par les enseignants ne peut être que bénéfique.

L'enseignement des mathématiques n'est pas un domaine facile. Pour pouvoir enseigner les mathématiques de façon intéressante et permettre aux étudiants d'apprécier cette science à sa juste valeur, les enseignants doivent miser sur une multitude d'outils, car ce n'est pas toujours simple de faire aimer les mathématiques en cette époque où les préjugés envers les mathématiques sont très présents. C'est pratiquement une norme sociale dans certains milieux au Québec de ne pas aimer les mathématiques, et ceux qui réussissent bien sont souvent vus comme « bizarres ». L'histoire n'est pas le seul outil pouvant permettre de redonner de l'intérêt à cette matière, mais elle apporte définitivement un aspect plus humain et dynamique.

Afin de développer cet intérêt des mathématiques, les étudiants doivent également bien comprendre ce qui leur est enseigné. Pour cela, de nombreuses options sont possibles, par exemple faire des liens entre des choses que les étudiants connaissent bien, comme expliqué à la [sous-section 3.3.4](#) sur la tangente à un cercle, ou encore l'utilisation de la notation en tant que langage tel qu'expliqué à la [section 2.2](#). La géométrie est également un outil puissant afin d'aider à la compréhension de mathématiques souvent expliquées de façon fortement analytique.

Pour moi, les mathématiques sont depuis toujours une source d'émerveillement et une profonde passion. Le but de cet essai était de partager cet intérêt pour les mathématiques,

plus particulièrement pour l'histoire, la géométrie et l'enseignement de cette science qui est si présente dans nos vies et qui gagne à être connue et appréciée.

# Bibliographie

- Beaulieu, M. et Hodgson, B. (2015). La rhétorique mathématique d'Archimède : où priment les canons de rigueur. *Accromath*, 10 :20–25.
- Boyer, C.B. (1989). *A History of Mathematics (2e édition)*. New York : Wiley.
- Cajori, F. (1928). *A History of Mathematical Notations*, volume 1. Chicago : Open Court Publishing Company.
- Cavalieri, B. (1647). *Exercitationes geometricae sex*. Typis I. Montij.
- Corriveau, C. (2 novembre 2017). Communication personnelle : Cours *Regards épistémologiques sur les mathématiques, leur apprentissage et leur enseignement* (MAT-7730). Université Laval.
- Corriveau, C. (7 décembre 2018). Communication personnelle : Rencontre ARIM. Collège Maisonneuve.
- Descartes, R. (1664). *La géométrie*. Paris : Charles Angot (Édition originale : 1637).
- Edwards, C.H. (2012). *The Historical Development of the Calculus*. New York : Springer.
- Fried, M.N. (2014). History of mathematics in mathematics education. In M.R. Matthews (dir.) *International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching*, pp. 669–703. Dordrecht : Springer.
- González-Velasco, E.A. (2011). *Journey through Mathematics : Creative Episodes in its History*. New York : Springer.
- Haverhals, N. et Roscoe, M. (2012). Transitioning students to calculus : Using history as a guide. In B. Sriraman (dir.) *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education*. Charlotte : Information Age Publishing.
- Heath, T.L. (1956). *Euclid–The Thirteen Books of the Elements, Vol. 1*. New York : Dover.

- Peyrard, F. (1966). *Les oeuvres d'Euclide*. Paris : Librairie scientifique et technique Albert Blanchard (Édition originale : 1819).
- Roberval, G.P. (1693). *Divers ouvrages de M. de Roberval*. Paris : Academie Royale.
- Ross, A. (2007). Vers le calcul différentiel et intégral. *Bulletin AMQ*, XLVII(1) :26–43.
- Serret, P. (1855). *Des méthodes en géométrie*. Paris : Mallet-Bachelier.
- Sierpiska, A. (1985). Obstacle épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques*, 6(1) :5–67.
- Strømholm, P. (1968). Fermat's methods of maxima and minima and of tangents. A reconstruction. *Archive for History of Exact Sciences*, 5(1) :47–69.
- Struik, D.J. (1969). *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Cambridge, MA. : Harvard University Press.
- Suzuki, J. (2005). The lost calculus (1637-1670) : Tangency and optimization without limits. *Mathematics Magazine*, 78(5) :339–353.
- Toeplitz, O. (2018). *The Calculus : A Genetic Approach*. Chicago : University of Chicago Press.
- Ver Eecke, P. (1960a). *Les œuvres complètes d'Archimède*, volume 2. Liège : Vaillant-Carmanne.
- Ver Eecke, P. (1960b). *Les œuvres complètes d'Archimède*, volume 1. Liège : Vaillant-Carmanne.
- Vitrac, B. (1990). *Euclide, Les Éléments. (Livres I à IV)*, volume 1. Paris : Presses Universitaires de France.