Essai

Dans le cadre du cours MAT-6500

# La compréhension des mathématiques de niveau universitaire

Travail présenté à
Frédéric Gourdeau
Bernard R. Hodgson

Réalisé par
Marianne Girard
111 132 792

Décembre 2019

# Table des matières

# Table des figures

# Introduction

Au cours de ma maîtrise en mathématiques, j'ai eu l'occasion de faire des lectures fort intéressantes sur la façon dont nous percevons et dont nous apprenons les mathématiques qui nous sont enseignées.

Les réflexions qui ponctuaient mes lectures reflétaient en quelque sorte les réflexions que j'ai eues tout au long de mon parcours en mathématiques. J'ai toujours été intéressée par l'enseignement et, plus particulièrement, je m'intéresse à savoir comment les gens comprennent les mathématiques et pourquoi certains étudiants comprennent très bien les mathématiques et d'autres non. Lorsque est venu le temps pour moi de faire un choix pour mes études au deuxième cycle, je devais choisir entre la maîtrise en mathématiques et le DESS (Diplômes d'études supérieures spécialisées) en enseignement au collégial. À ce moment, un de mes anciens professeurs à l'université m'a dit quelque chose qui m'a marquée : « Pour mieux enseigner les mathématiques, il faut faire plus de mathématiques ». Sans dire que ceci est vrai, c'est toutefois quelque chose qui m'a fait beaucoup réfléchir. Il est logique de penser que faire plus de mathématiques nous aidera à être un meilleur enseignant, mais est-ce que cela est suffisant ? De toute manière, qu'est-ce que signifie vraiment de bien comprendre les mathématiques. Déjà à ce moment, je me questionnais beaucoup sur le sujet.

Une première lecture qui a mené à l'écriture de cet essai est le livre de Liping Ma portant sur la compréhension des mathématiques des enseignants au primaire de la Chine et des États-Unis [Ma, 1999]. Au cours de cette lecture, même si les divers sujets abordés portaient sur des mathématiques élémentaires, je ne cessais de faire des liens avec les notions vues à l'université. Je trouvais les idées apportées très intéressantes et je me questionnais sans cesse à savoir comment ces idées pouvaient être appliquées aux mathématiques universitaires.

À la suite de cela, j'ai fait beaucoup d'autres lectures qui m'ont inspirée à vouloir étudier la compréhension des mathématiques. Un autre texte qui m'a beaucoup marquée est un article d'Hyman Bass [Bass, 2011] qui se voulait un aperçu de ce que représente de *faire* des mathématiques. Dans ce texte, Bass nous raconte de son point de vue ce à quoi ça ressemble de faire des mathématiques et de les utiliser.

Un autre moment important qui a mené à l'écriture de cet essai est un cours de didactique que j'ai suivi durant ma maîtrise : Didactique des sciences au collégial I (DID-6000). Dans ce cours, nous avons soulevé des questions importantes sur la compétence en sciences et sur la compréhension des sciences. Notamment, en tant qu'enseignant au cégep, nous devons évaluer nos étudiants sur leur <u>compétence</u> en mathématiques. Or, qu'est-ce que cela signifie. Plusieurs réformes modernes de l'enseignement prétendent vouloir axer les programmes d'études gouvernementaux sur la compréhension des mathématiques, plutôt que sur l'idée d'appliquer des mathématiques. En tant que future enseignante moi-même, je me questionne à savoir ce que cela signifie d'être compétent, de bien comprendre les mathématiques qui nous sont enseignées et, éventuellement, de comment juger de la compréhension des étudiants.

Ce sont ces nombreuses expériences et réflexions qui m'ont menée à vouloir m'intéresser à la compréhension des mathématiques. J'ai choisi de m'intéresser aux mathématiques universitaires puisque j'ai trouvé très peu d'articles sur le sujet dans la littérature. La majorité traitant de mathématiques de niveau primaire, secondaire ou collégial, j'ai décidé de voir comment toutes les notions acquises dans mes lectures pouvaient s'appliquer à l'université.

Cet essai est l'aboutissement des nombreux cours, des lectures, des réflexions et des discussions fort intéressantes qui ont parsemé mes études au deuxième cycle. Dans ce travail, j'aimerais amener une vision un peu critique sur la manière dont certaines notions sont présentées aux étudiants du baccalauréat en mathématiques à l'université. Pour ce faire, j'appuierai mes analyses sur deux théories étudiées au cours de ma maîtrise.

Une dernière chose à garder en tête au cours de la lecture de cet essai est que lorsque l'on discute de la compréhension, il est difficile de donner des explications que nous savons véridiques. Toutefois, en se donnant des outils théoriques, il nous est possible de discuter et d'analyser la compréhension de manière à nous questionner sur ce qui peut expliquer des difficultés observées chez des étudiants. En ce sens, je vous laisse sur une citation qui a inspirée en partie le travail contenu dans cet essai.

> « We do not think that a theory of learning is a statement of truth and although it may or may not be an approximation to what is really happening when an individual tries to learn one or another concept in mathematics, this is not our focus. Rather we concentrate on how a theory of learning mathematics can help us understand the learning process by providing explanations of phenomena that we can observe in students who are trying to construct their understandings of mathematical concepts and by suggesting directions for pedagogy that can help in this learning process. »[1] [Dubinsky et McDonald, 2002]

1. [Traduction] Nous ne pensons pas qu'une théorie de l'apprentissage est une constatation de la vérité et bien qu'il est possible que ce soit ou non une approximation de ce qui arrive pour vrai lorsque qu'un individu essaie d'apprendre un concept en mathématiques, là n'est pas notre focus. Nous nous concentrons plutôt sur comment une théorie de l'apprentissage des mathématiques peut nous aider à comprendre le processus d'apprentissage en fournissant des explications des phénomènes que nous pouvons observer chez les étudiants qui essaient de construire leur compréhension de concepts mathématiques en donnant des suggestions pédagogiques qui peuvent aider le processus d'apprentissage.

# Éléments théoriques

Dans la première partie de cet essai, nous expliquerons quelques éléments théoriques. L'objectif premier de ce travail est de discuter de la compréhension des mathématiques de niveau universitaire. Pour ce faire, il sera utile de se doter d'un cadre théorique et d'un vocabulaire permettant d'étudier un peu plus en profondeur certains aspects des cours offerts au baccalauréat en mathématiques. C'est donc ce qui sera fait dans cette partie.

Dans un premier temps, nous discuterons de ce que représente *comprendre* les mathématiques. Nous tenterons de définir en partie la compréhension des mathématiques. Par la suite, deux théories de la compréhension en mathématiques seront présentées. Nous pourrons réutiliser les notions formant ces théories dans la partie *Discussion* de cet essai.

# 1 Compréhension des mathématiques

Étant donné que cet essai porte principalement sur la notion de *compréhension*, la première étape sera de discuter de ce que cela représente de comprendre des mathématiques. Pour ce faire, nous regarderons plusieurs définitions différentes. L'objectif ici n'est pas de définir rigoureusement ce concept, mais plutôt de se donner une idée générale qui, dans le cadre de cet essai, servira de point de départ.

## 1.1 Définition générale

Dans un premier temps, regardons deux définitions prises de dictionnaires de la langue française :

**Comprendre**
« Donner à (qqch.) un sens clair. Déchiffrer, interpréter. Comprendre l'énoncé d'un problème. Comprendre un discours, une explication. »

[2017 Le Grand Robert de la langue française]

**Compréhension**
« Action de comprendre le sens, le fonctionnement, la nature, etc., de quelque chose. »

[Larousse]

En revenant aux mathématiques, que signifierait l'idée de comprendre le sens, le fonctionnement et la nature des mathématiques ? Qu'est-ce que serait l'idée de donner un sens clair aux mathématiques ? Est-ce que l'idée de comprendre des concepts en mathématiques pourrait venir de la facilité à appliquer des algorithmes en lien avec le concept, de la connaissance de son origine historique, de l'idée de pouvoir le verbaliser ou peut-être un mélange de tout cela ? Quoi qu'il en soit, il n'est pas si simple de voir ce que signifie *comprendre* les mathématiques et il est normal que ce mot prennent un sens différent selon la personne qui l'utilise.

Plusieurs chercheurs au fil du temps ont tenté de définir et de caractériser ce que cela signifiait de bien comprendre les mathématiques. En particulier, une définition intéressante de la compréhension en mathématique est celle de Liping Ma.

## 1.2 Concept de compréhension profonde de Liping Ma

Une deuxième approche pour traiter de la compréhension des mathématiques est celle de la *compréhension profonde des mathématiques fondamentales* introduite par Liping Ma dans son étude sur les différences entre l'enseignement des mathématiques en Chine et aux États-Unis [Ma, 1999].

Dans son livre, Liping Ma décrit plusieurs notions importantes dans l'étude de la compréhension des mathématiques, en se basant sur des entrevues réalisées auprès d'enseignants des deux pays. Son objectif est de tenter d'expliquer pourquoi, sur la scène internationale, les élèves chinois performent, en général, mieux que les élèves états-uniens. Pour ce faire, elle se concentre non pas sur la compréhension des élèves, mais plutôt sur celle des enseignants. C'est dans ce contexte qu'elle introduit la notion de compréhension profonde des mathématiques fondamentales. Bien que l'étude porte sur l'enseignement des mathématiques au niveau primaire, cette notion s'applique aussi aux mathématiques avancées et est directement en lien avec l'étude de la compréhension faite dans cet essai.

Voici comment elle définit la notion dans son livre :

> «I call the subject matter knowledge [...] profound understanding of fundamental mathematics (PUFM). By profound understanding I mean an understanding of the terrain of foundamental mathematics that is deep, broad, and thorough. Although the term *profound* is often considered to mean intellectual depth, its three connotations, *deep*, *vast*, and *thorough*, are interconnected.» [2] [Ma, 1999, p.120]

La principale caractéristique à retenir dans cette définition est, selon moi, l'idée que la compréhension, en plus d'être approfondie, doit être vaste. En d'autres mots, pour comprendre les mathématiques, il ne faut pas seulement aller plus en profondeur dans un sujet (en apprenant des mathématiques plus avancées notamment), mais également de comprendre la même matière de plusieurs façons différentes et dans différents contextes. C'est cet aspect de vaste qui m'a beaucoup fait réfléchir et qui sera intéressant à garder en tête.

Ainsi, dans cet essai, lorsque nous référons à l'idée de comprendre *en profondeur*, c'est à cette idée de profondeur de Liping Ma que nous ferons référence.

2. [Traduction] Je nomme la connaissance de la matière [...] la *compréhension profonde des mathématiques fondamentales* (CPMF). Par compréhension profonde, je veux dire une compréhension du domaine des mathématiques fondamentales qui est poussée, vaste et approfondie. Même si le terme *profond* réfère souvent à la profondeur intellectuelle, ses trois connotations, *poussée*, *vaste* et *approfondie*, sont toutes interconnectées.

## 1.3 La psychologie de l'apprentissage des mathématiques de Richard R. Skemp

Un autre point de vue intéressant à ce qui à trait à l'apprentissage et à la compréhension des mathématiques est celui de Richard R. Skemp. Dans son livre, *The psychology of learning mathematics* [Skemp, 2012], Richard R. Skemp discute de l'apprentissage des mathématiques en étudiant l'aspect psychologique de l'apprentissage.

Bien que les notions discutées dans son livre sont particulièrement intéressantes et pertinentes, elles ne seront pas traitées en détail dans cet essai. Toutefois, comme notre objectif ici est de discuter de ce que pourrait représenter la compréhension des mathématiques, il y a un passage de son livre qui est en lien avec cela et qui pourrait nous être utile :

> « Likewise, mathematics is a way of using our minds that greatly increases the power of our thinking. [...] If this point of view is correct, then it is predictable that children will not succeed in learning maths unless they are taught in ways that enable them to bring their intelligence, rather than rote learning, into use for their learning of mathematics. »[3] [Skemp, 2012, p. 7]

Dans cet extrait, on discute du fait que faire des mathématiques, c'est utiliser son esprit. Bien que cela puisse sembler un peu tautologique, l'aspect important ici est de voir que, dans l'optique de comprendre et de réussir en mathématiques, il n'est pas suffisant de voir plein de notions et de les apprendre par cœur. Il faut plutôt tenter de les déchiffrer, de les manipuler et de les étudier en détail.

## 1.4 Se donner un cadre

Les deux aspects discutés précédemment servent surtout à se donner une idée de ce à quoi nous ferons référence lorsque nous parlerons de *comprendre* des mathématiques.

En gardant en tête ces aspects, deux théories de la compréhension des mathématiques seront détaillées dans le reste de la partie *Éléments théoriques*. La première, celle de Susan Pirie et de Thomas Kieren, traite de différents stades pouvant caractériser la compréhension d'un individu au cours de l'apprentissage d'un concept mathématique. La seconde, la théorie APOS d'Ed Dubinsky, traite de la caractérisation de l'activité intellectuelle pour tenter de voir comment un concept en mathématiques peut être intériorisé par un individu.

Ces deux théories nous serviront d'outils pour discuter de l'apprentissage et de la compréhension de différentes notions en mathématiques avancées.

3. [Traduction] Également, les mathématiques sont une façon d'utiliser notre esprit qui accroît considérablement la force de notre pensée. [...] Si ce point de vue est correct, alors il est prévisible que les enfants n'auront pas de succès dans leur apprentissage des mathématiques à moins qu'on leur enseigne de manière à leur permettre de faire usage de leur intelligence, plutôt que d'apprendre par cœur, au cours de leur apprentissage des mathématiques.

# 2 Théorie de Pirie et de Kieren

La première théorie présentée dans le cadre de cet essai sera celle de Susan Pirie et de Thomas Kieren. La prochaine section sera basée entièrement sur leur article *Growth in mathematical understanding : How can we characterise it and how can we represent it ?* [Pirie et Kieren, 1994].

## 2.1 Objectifs du modèle

Avant d'entrer dans l'explication de la théorie de Pirie et de Kieren, il est important de bien mettre en contexte leur recherche dans cet article. Dans plusieurs pays, les réformes mises en place en éducation visent à ce que l'enseignement des mathématiques soit basé davantage sur la compréhension de concepts, plutôt que sur l'apprentissage de procédures. Dans cette optique, une question se pose : Comment est-il possible de caractériser la compréhension des mathématiques de façon à pouvoir mesurer la progression des étudiants lors de l'apprentissage d'un nouveau concept ? C'est cette question qui a mené les auteurs à tenter de construire un modèle général permettant de voir la progression de la compréhension en mathématique, afin de pouvoir mieux observer et quantifier la progression des élèves.

## 2.2 Description du modèle

Dans cette théorie, on divise le processus de compréhension en huit « stades ». Dans l'étude, chacun des stades est une caractérisation de ce qui a été observé chez les sujets par les auteurs. Durant l'apprentissage d'un concept par une personne, il est donc possible de suivre le développement de sa compréhension en situant dans quel stade celle-ci se situe. De plus, le modèle est dit récursif. En d'autres mots, il présente une façon non linéaire et globale de voir la progression de la compréhension des connaissances chez un individu.

En bref, chacun des huit stades représente un « moment » différent de la compréhension chez un sujet. Chacun des stades influence les autres. Comme cet essai porte sur la compréhension des mathématiques, les stades décrits dans le modèle de Pirie et de Kieren seront très utiles, car ils nous permettront de verbaliser certains aspects de la compréhension en mathématique dans la partie *Discussion* de cet essai.

## 2.3 Description des différents stades

Dans cet essai, les noms des différents stades ont été traduits de l'anglais vers le français. Voici les différents stades et leur traduction : connaissances initiales (*Primitive Knowledge*), création d'une image (*Image Making*), appropriation de l'image (*Image Having*), observation de propriétés (*Property noticing*), généralisation [4] (*Formalising*), observations approfondies (*Observing*), structuration (*Structuring*) et détachement (*Inventising*). Il existe une certaine hiérarchie entre les stades. Celle-ci est imagée dans la Figure 2.1.

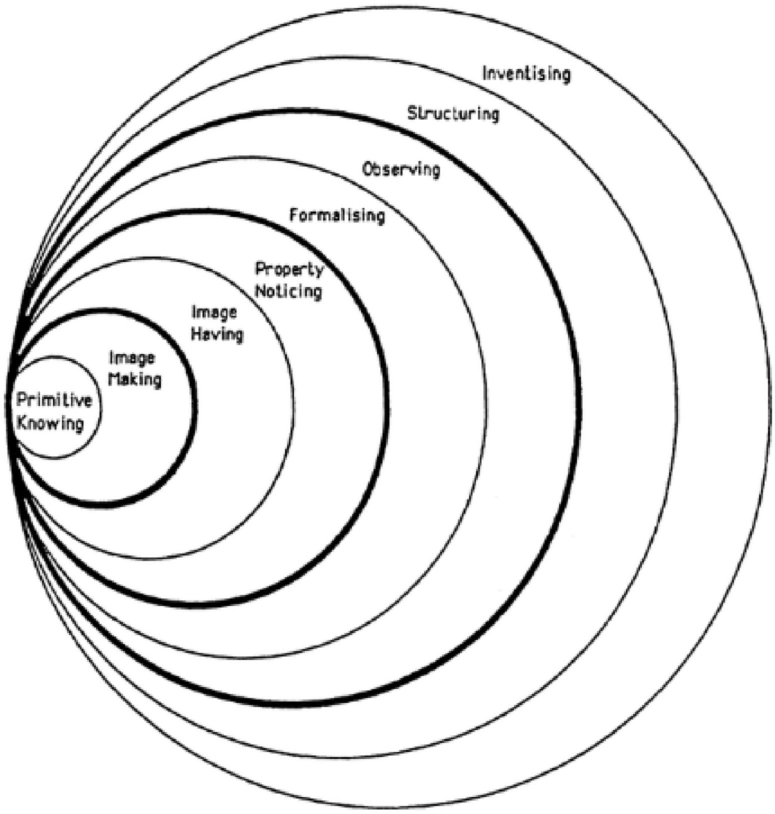


FIGURE 2.1 – Les différents stades du modèle de Pirie et de Kieren [Pirie et Kieren, 1994, p. 167]

### 2.3.1 Connaissances initiales

Le tout premier stade de la compréhension formulé par Pirie et Kieren est celui des connaissances initiales. Il représente en quelque sorte où la personne débute lors de l'apprentissage d'un nouveau concept et, en particulier, quelles sont les connaissances en lien de près ou de loin avec celui-ci qui sont déjà connues. Il ne s'agit pas forcément que de mathématiques élémentaires. Au contraire, plus un concept est poussé, plus les connaissances initiales le seront elles aussi.

4. Comme aucune traduction officielle n'existe à ce jour, les termes sont une traduction libre. Une traduction plus directe de *formalising* aurait été formalisation, mais le terme généralisation a été choisi, puisqu'il représentait, selon moi, mieux les aspects importants qui caractérisent ce stade. (Voir la sous-section 2.3.5.)

Bien évidemment, il n'est pas possible de connaître l'ensemble des connaissances initiales d'un étudiant. Toutefois, il est possible de tester pour voir si certaines connaissances, jugées préalables pour l'apprentissage du concept, sont déjà connues de l'étudiant.

Dans le cadre d'études de niveau universitaire, chacun des cours en mathématiques a une liste de cours préalables. Il s'agit en quelque sorte d'un indicatif de l'ensemble des connaissances initiales attendues chez l'étudiant.

### 2.3.2 Création d'une image

Le deuxième stade est celui dans lequel une personne se construit une image mentale du concept. Comme son nom l'indique, l'étudiant essai de se former une représentation interne du concept, de « voir » en quelque sorte le concept. Dans ce stade, les auteurs tentent de caractériser la phase d'expérimentations, d'exemplifications et de questionnements menant à la formation d'un concept dans la tête de l'étudiant. En d'autres mots, c'est en utilisant plusieurs exemples dans différentes mises en situation que l'étudiant peut ainsi extraire les informations pertinentes pour se former une image mentale du concept qui restera ensuite et servira dans tous les stades suivants.

Dans ce stade, il est également commun qu'une personne utilise les connaissances initiales (celles décrites dans le premier stade) et les utilise pour tenter de comprendre le nouveau concept. En bref, ce stade représente le début de la compréhension, celui dans lequel le concept prend forme chez l'étudiant.

### 2.3.3 Appropriation de l'image

Le troisième stade est celui dans lequel l'étudiant commence à assez bien comprendre le concept pour l'utiliser. Il peut maintenant se l'approprier en l'utilisant dans différents contextes. Une façon de voir si un étudiant est rendu à ce stade dans sa compréhension est lorsqu'il n'a plus besoin de passer par toutes les expérimentations qui caractérisaient le deuxième stade pour utiliser le concept.

Également, maintenant que le concept est connu et que l'étudiant possède une bonne image mentale, il peut comprendre d'autres éléments en liens avec celui-ci. Ce stade est un peu abstrait, mais il nous sera beaucoup utile dans le cadre de cet essai et des notions qui seront traitées plus tard. Ce qu'il est important de retenir pour l'instant est que l'appropriation de l'image caractérise le moment où l'étudiant devient assez à l'aise avec le concept pour le voir et l'utiliser.

### 2.3.4 Observation de propriétés

Au quatrième stade, l'étudiant devient assez à l'aise avec le concept pour le manipuler et l'utiliser dans un contexte différent que celui qui a permis la construction de l'image mentale. En d'autres mots, il est maintenant possible de résoudre des problèmes plus spécifiques en utilisant le concept. L'image faite est donc assez solide pour étudier le concept d'un point de vue différent et l'analyser de manière plus appliquée.

Comme le titre l'indique, il s'agit également du stade durant lequel l'étudiant peut observer des propriétés et comprendre davantage le concept en le manipulant et en se questionnant.

### 2.3.5 Généralisation

Dans le cinquième stade, l'étudiant utilise l'image mentale qu'il s'est faite au stade 2 (création d'une image) pour développer une vision plus abstraite du concept. Cette image est, pour ainsi dire, mise de côté et ce sont plutôt les propriétés trouvées au quatrième stade qui viennent la « remplacer ». En d'autres mots, le contexte spécifique dans lequel le concept a été appris n'est plus nécessaire pour voir le concept. On fait plutôt une caractérisation du concept. De plus, l'avantage dans ce stade est que l'étudiant peut utiliser les propriétés trouvées au quatrième stade, sans avoir à se mettre dans un cadre fermé, dans un exemple concret.

Il est possible à ce stade de voir apparaître davantage de notations et d'expressions mathématiques pour généraliser le concept, puisque le symbolisme en mathématiques permet usuellement d'aller chercher plus de généralité. Les notions apprises en même temps que le concept peuvent également être réutilisées pour généraliser dans une situation différente.

Aussi, dans ce stade, on ne se concentre plus sur ce qu'**est** le concept, mais plutôt sur **pourquoi** il est ainsi ou quels sont les aspects qui le caractérise.

### 2.3.6 Observations approfondies

Lorsque l'image interne d'un concept est bien ancrée et que la formulation mathématique (généralisation) est solide et bien maîtrisée, il est possible pour une personne de pousser un peu plus loin sa compréhension pour trouver des situations qui sont toujours vraies (des théorèmes) ou pour trouver des modèles qui fonctionnent toujours. L'étudiant se trouve alors dans le stade 6. À ce stade, le niveau de compréhension du concept est tellement élevé qu'il est possible d'extrapoler à partir de ce qui est connu du concept.

Évidemment, si l'image mentale du concept est floue, si les propriétés du concept sont mal comprises ou si la généralisation n'a pas été faite, il est très difficile d'atteindre ce stade. Pour y parvenir, il faut retourner à la base et s'assurer de bien consolider les aspects discutés dans les stades 2 à 5. Ensuite seulement nous sera-t-il possible de se rendre aussi loin dans des observations beaucoup plus poussées et approfondies en lien avec le concept.

### 2.3.7 Structuration

Le septième stade de la compréhension selon Pirie et Kieren est celui dans lequel se trouve une personne qui veut structurer ses idées pour en faire une théorie. Il est assez rare, lors de l'apprentissage de concepts en mathématiques plus élémentaires, de se rendre à ce stade si poussé de la compréhension, quoi qu'il ne serait pas impossible de le faire dans le cadre d'un cours.

Au niveau des mathématiques plus avancées, toutefois, ce stade est beaucoup plus présent. Dans ce cas, il s'agit aussi de développer une vision plus formelle des mathématiques, telle que vécue dans les cours du baccalauréat en mathématiques (définitions, théorèmes, démonstrations, etc.)

### 2.3.8 Détachement

Le dernier et huitième stade de la compréhension est celui où un détachement complet du concept se fait. La personne a alors une vision très claire et structurée de l'ensemble des notions en lien avec le concept qu'elle peut se détacher d'idées préconçues et d'ainsi atteindre un niveau très abstrait.

C'est dans ce stade qu'une personne peut partir du concept appris et tenter d'en développer un autre. Encore une fois, il est rare en tant qu'étudiant de se rendre dans un stade si poussé de la compréhension et c'est pourquoi le détachement ne sera pas expliqué davantage dans le cadre de cet essai, puisqu'il ne nous sera pas utile dans la partie *Discussion*.

## 2.4 Exemple concret des différents stades

Pour développer leur modèle, Pirie et Kieren ont fait des expérimentations dans des classes de jeunes de 12 ans. Dans l'article, on considère plus particulièrement la situation de Teresa, une jeune élève qui tente de comprendre l'addition de fractions. Afin de bien comprendre les différents stades, l'exemple détaillé de Teresa dans l'article est ici résumé dans le tableau de la Figure 2.2.

Les deux derniers stades de la compréhension (Structuration et Détachement) ne sont évidemment pas présents dans cet exemple. Comme expliqué plus tôt, il est rare d'atteindre ces deux stades lors de l'apprentissage de mathématiques élémentaires. Cela ne signifie pas que Teresa n'a pas bien compris l'addition de fractions, seulement que l'objectif de l'activité n'était tout simplement pas de se rendre là.

| | Rappel de la définition | Exemple de Teresa |
|---|---|---|
| Connaissances initiales | Ensemble des connaissances déjà connues avant l'apprentissage du nouveau concept. | Pour l'addition de fractions, les connaissances initiales souhaitées sont la terminologie en lien avec les fractions et la façon de construire des fractions. Dans le cas de Teresa, l'enseignant a testé au préalable ses connaissances et il a pu déduire que sa connaissance générale des fractions était bonne. |
| Création d'une image | Création d'une image mentale de ce que représente le concept. | L'activité proposée à Teresa visait à lui faire visualiser ce qu'est une fraction (en terme de quantité et non seulement de nombre) et à voir qu'en combinant (i.e. additionnant) des fractions, on peut construire des entiers. En utilisant une trousse, Teresa a pu se faire une image mentale de l'addition de fractions et cette image est venue remplacer celle qu'elle avait au préalable et qui était incomplète. |
| Appropriation de l'image | Assimilation du concept et utilisation en dehors du cadre d'expérimentation. | À partir du moment où Teresa a commencé à voir des fractions comme des quantités plutôt que seulement comme des nombres, elle a commencé à pouvoir additionner sans forcément se questionner sur l'algorithme qu'elle doit effectuer. Elle a donné un sens à l'addition par des fractions et est maintenant capable de la réaliser. |

*Suite du tableau à la page suivante...*

| | | |
|---|---|---|
| Observation de propriétés | Manipulation du concept dans d'autres contextes et développement de propriétés en lien avec celui-ci. | Pour Teresa, les auteurs ont pu observer ce stade de compréhension lorsqu'elle a utilisé ce qu'elle savait de l'addition et ce qu'elle a découvert sur les fractions dans l'activité pour formuler comment faire l'addition de fractions. Son image d'addition était de trouver des morceaux qui sont compatibles ensemble pour en former d'autres. Étant donné qu'elle voit maintenant les fractions comme des quantités, elle a pu formuler l'algorithme d'addition de fractions. De plus, étant à l'aise avec les fractions équivalentes, il était plus facile pour elle de former des « morceaux » qui s'agencent ensemble, i.e. qui ont le même dénominateur. |
| Généralisation | Abstraction du concept pour généraliser via ses propriétés et sortir du contexte spécifique.<br><br>Apparition possible de plusieurs expressions mathématiques permettant de rendre le concept plus général le concept. | Lors de l'activité, Teresa commençait à être un peu plus à l'aise avec la notion de fraction et avec l'idée de devoir « agencer » les fractions entre elles pour former des entiers ou tout simplement pour former une seule fraction. Ensuite, elle a pu utiliser cette image qu'elle s'était appropriée pour voir l'addition par les fractions d'un point de vue plus théorique avec les nombres et les symboles. Toutefois, contrairement au début de l'activité, Teresa comprenait pourquoi l'algorithme d'addition fonctionnait ainsi et était maintenant capable de l'effectuer. Aussi, ce stade a pu être observé lorsque Teresa a dû réfléchir à la soustraction de fractions. Elle a réussi à développer elle-même une façon de soustraire qui était en lien avec l'image qu'elle avait de l'addition de fractions. |
| Observations approfondies | Pousser la compréhension plus loin en extrapolant du concept et en tentant de trouver des faits qui soient toujours vrais. | Suivant l'activité sur l'addition de fractions, Teresa a dû trouver le plus de façons possibles de générer $\frac{2}{3}$. Elle a décidé de faire un tableau dans lequel elle notait les différentes combinaisons qui lui donnaient deux tiers. Teresa a pu atteindre ce niveau au cours de l'activité lorsqu'elle tentait de faire ressortir des situations générales de sa charte ou lorsqu'elle tentait de formaliser sa façon d'agencer les fractions. Ainsi, en tentant de trouver des fractions différentes qui, lorsqu'additionnées, donnent deux tiers, elle a pu comprendre qu'elle peut générer de nouvelles combinaisons en remplaçant un morceau (i.e. une fraction) par d'autres morceaux équivalents. Par exemple, elle peut remplacer $\frac{1}{6}$ par $\frac{2}{12}$ pour générer une nouvelle combinaison. Elle a donc « découvert » cette propriété et a pu conclure qu'il existait beaucoup de combinaisons de fractions qui donnaient $\frac{2}{3}$. |

FIGURE 2.2 – Exemple détaillé des différents stades du modèle

## 2.5 Autres caractéristiques du modèle

Dans l'article, Pirie et Kieren expliquent trois caractéristiques associées à leur modèle.

### 2.5.1 Abstraction des barrières

L'une des forces des mathématiques est qu'il est possible de travailler de manière très abstraite à l'aide de notations, sans constamment avoir à se soucier du cadre spécifique associé à des cas concrets. Un des avantages de ce modèle, selon les auteurs, est qu'il est possible de voir dans leur théorie ce phénomène se développer lors de l'apprentissage d'un concept mathématique, notamment dans les stades 2 et 3 où une image mentale forte est construite. Ensuite, dans les 4 stades suivants, l'abstraction se concrétise davantage. C'est donc ce qui a été nommé comme l'abstraction des barrières (en anglais *Don't need boundaries*).

### 2.5.2 Retour en arrière

Une autre caractéristique importante de la théorie de Pirie et de Kieren est celle du « Retour en arrière » (de l'anglais *Folding Back*). Comme mentionné plus tôt, le modèle ne doit pas être vu comme linéaire. Il est possible de passer d'un stade à l'autre dans l'ordre dans lequel les stades ont été présentés dans cet essai, mais il est également possible de revenir aux stades précédents en cours de route.

Par exemple, il est possible que lorsque vienne le temps de généraliser (stade 5), les propriétés développées au stade précédent ou l'image mentale ne soient pas suffisantes. Il est alors important de revenir en arrière pour trouver d'autres propriétés ou pour faire d'autres expérimentations permettant d'élaborer davantage notre compréhension et notre image mentale du concept. C'est en ce sens qu'on réfère au modèle comme étant non linéaire.

### 2.5.3 Complémentarité d'agir et d'exprimer

Finalement, dans le modèle de Pirie et de Kieren, il est possible de détailler davantage chacun des stades en traitant de deux notions complémentaires : agir et exprimer.

D'un côté, le fait d'agir représente l'investissement fait par l'étudiant pour apprendre. Pour comprendre une notion, l'étudiant doit s'investir et réfléchir pour réellement progresser dans les différents stades.

De l'autre côté, le fait d'exprimer réfère à la verbalisation faite par un étudiant pour expliquer ce qu'il a appris. Cette partie n'est pas obligatoire au sens qu'un étudiant peut ne pas verbaliser les notions apprises et tout de même les comprendre, mais le fait de devoir parler de ce qui a été compris aide grandement à consolider les apprentissages.

En bref, le fait d'agir réfère au **comment** un étudiant apprend et le fait d'exprimer réfère plus au **quoi**, à ce que l'étudiant apprend.

Bien que très intéressantes, ces notions ne seront pas davantage expliquées dans cet essai, car elles ne seront pas réutilisées dans la partie *Discussion*.

### 2.6 En résumé

Il est important de se rappeler que le modèle expliqué dans l'article de Susan Pirie et de Thomas Kieren n'est pas exhaustif. Il permet toutefois de voir, en général, la progression de la compréhension via des éléments théoriques plus concrets. Il permet également de donner un outil aux enseignants et aux chercheurs qui se questionnent sur le cheminement des étudiants au cours de l'apprentissage d'un concept, au lieu de simplement tester *a posteri* la compréhension, notamment dans le cadre d'évaluations sommatives.

Dans cet essai, ces outils seront utiles pour discuter de certaines notions du baccalauréat en mathématiques. Ils nous permettront d'étudier et parfois même d'expliquer en partie certains problèmes de compréhension chez des étudiants du premier cycle universitaire dans des cours de mathématiques.

Les huit stades décrits dans l'article sont ainsi des outils et des descriptions de différents moments « charnières » qui peuvent survenir lors de l'apprentissage de concepts en mathématiques.

En résumé, la théorie formulée par Pirie et Kieren offre un outil pouvant être utile pour voir la progression de la compréhension en mathématiques via des stades théoriques détaillés.

# 3 Théorie APOS

La deuxième théorie présentée dans cet essai est la théorie APOS, que l'on doit à Ed Dubinsky. Le travail fait par Dubinsky pour développer le cadre théorique de APOS rejoint pleinement les objectifs cet essai : l'analyse de la compréhension de différents concepts en mathématiques de niveau universitaire. Partant des notions de Piaget, Dubinsky développe sa théorie, afin de pouvoir utiliser les notions fondées initialement sur l'étude de jeunes enfants par Piaget dans l'analyse de mathématiques avancées.

La théorie APOS se base donc principalement sur les travaux de Jean Piaget, plus particulièrement sur la notion d'abstraction réfléchissante et sur les constructions qui en découlent. Dans ce chapitre, nous verrons les notions importantes de la théorie de Piaget qui ont formé les fondements de la théorie APOS d'Ed Dubinsky. Nous verrons ensuite en quoi consiste cette théorie. Certains éléments, notamment en ce qui a trait à Piaget, seront laissés de côté volontairement, afin de ne conserver que ce qui sera utile dans la compréhension de APOS en lien avec l'analyse de la partie *Discussion* du présent essai.

## 3.1 Abstraction réfléchissante

### 3.1.1 Définition

D'après les travaux de Piaget, il existe deux principales formes d'abstraction [Piaget, 1974, p. 81]. La première, l'**abstraction empirique**, est celle qui porte sur les objets physiques et sur leurs propriétés observables telles que la masse, la couleur, la forme, la texture, etc. En observant de près un objet et en agissant sur celui-ci, il est possible de faire ressortir ses propriétés et de le définir dorénavant par ces propriétés. Il s'agit donc en quelque sorte de passer du cas spécifique à une définition beaucoup plus générale basée sur ce que l'on peut voir. L'image mentale de l'objet se fait via les observations, d'où le nom d'abstraction empirique.

Le deuxième type d'abstraction, en opposition au premier, ne se base pas sur l'objet lui-même, mais plutôt sur le sujet qui observe l'objet et sur les processus intellectuels utilisés par celui-ci [Arnon et al., 2014, p. 7]. Il s'agit de l'**abstraction réfléchissante** qui porte sur «toutes les activités cognitives du sujet (schèmes ou coordinations d'actions, opérations, structures, etc.) pour en dégager certains caractères et les utiliser à d'autres fins (nouvelles adaptations, nouveaux problèmes, etc.)» [Piaget et al., 1977, p. 6]. En d'autres mots, on s'intéresse ici au cheminement mental et aux processus internes utilisés par une personne pour décrire un objet (réel ou mathématique), plutôt qu'à l'objet lui-même. L'abstraction réfléchissante peut donc être vue comme un mécanisme basé sur le sujet pour analyser sa compréhension d'un objet (d'un concept). Pour ce qui est de Dubinksy, l'abstraction réfléchissante sera vue comme la « construction mentale d'objets et d'actions internes effectuées [par l'individu] sur ces objets »[5] [Dubinsky, 1991, p. 102]. Ainsi, les notions de Piaget, plus particulièrement celles de la sous-section 3.1.2, seront utiles à Dubinsky pour caractériser les stratégies utilisées par des individus pour comprendre des concepts en mathématiques avancées.

Parfois, une troisième forme d'abstraction est considérée dans les travaux de Piaget. Il s'agit de l'abstraction pseudo-empirique qui se trouve en quelque sorte à mi-chemin entre les abstractions empiriques et réfléchissantes [Dubinsky, 1991, p. 97]. Cette notion, quoi que très intéressante, ne sera pas utile dans le cadre de cet essai, ni dans la description de la théorie APOS.

#### 3.1.2 Types de constructions mentales

Dans l'étude de l'abstraction réfléchissante, il est possible de former cinq principaux groupes de constructions mentales chez les sujets observés. Dans ses travaux, Piaget ne considère souvent que quatre constructions, puisqu'il dit que la cinquième (renversement) peut être décrite en utilisant les quatre autres. Toutefois, comme Dubinsky l'utilise à part entière dans sa théorie APOS [Cappetta et Zollman, 2013, p. 344], nous l'inclurons ici au même titre que les autres. Il est possible de voir ces constructions comme différentes «méthodes» utilisées par les individus dans le mécanisme d'abstraction réfléchissante. Les cinq constructions sont expliquées en détail dans la Figure 3.3.

## 3.2 Description de la théorie

La théorie APOS est a été introduite par Ed Dubkinsky et développée en collaboration avec le groupe RUMEC (*Research in Undergratuate Mathematics Education Community*) [Trigueros et Oktaç, 2005, p. 157]. Les principaux objectifs de cette théorie sont d'étudier la manière dont les personnes construisent une image mentale de différents concepts de mathématiques avancées et de fournir un cadre théorique pour décrire ces constructions [Trigueros et Oktaç, 2005, p. 163]. En d'autres mots, la théorie APOS sert à caractériser les étapes de transformation des objets réels ou mathématiques en concepts internes par des individus, afin de mieux comprendre la construction mentale chez le sujet observé.

La théorie APOS part de l'idée que les connaissances en mathématiques sont formées par la perception que le sujet a de situations problèmes. Pour donner un sens à la situation, celui-ci forme mentalement un ensemble cohérent d'actions, de processus et d'objets servant à décrire la situation et à organiser intérieurement les éléments importants pour former un schème [Dubinsky et McDonald, 2002, p. 1]. Cette organisation permet à l'individu de traiter des situations afin de les résoudre. C'est donc ces quatres éléments qui forment principalement la théorie APOS : **A**ctions, **P**rocessus, **O**bjets et **S**chèmes.

5. Traduit de l'anglais.

| **Construction** | **Description** |
|---|---|
| Intériorisation | L'individu analyse la procédure pour définir le concept. En regardant les différentes étapes d'un procédé et en utilisant des outils (symbolisme, langage logico-mathématique, images mentales) le sujet parvient à définir intérieurement un concept. |
| Coordination | L'individu combine deux processus différents (déjà intériorisés) et les intègre en un nouveau processus interne pour analyser un nouveau concept mathématique. En d'autres mots, il s'agit en quelque sorte de combiner deux processus déjà bien connus, afin d'en comprendre un nouveau. |
| Encapsulation | Il s'agit de la personnification du concept par l'individu. Ce dernier se crée un sens propre, une image personnelle, afin qu'une notion abstraite devienne significative pour lui. L'encapsulation permet vraiment à un sujet de donner vie intérieurement à un concept. |
| Généralisation | Après qu'une notion ait été encapsulée, elle peut être réutilisée pour traiter d'une collection beaucoup plus large de concepts et de problèmes mathématiques. C'est cet élargissement visible chez l'individu que l'on nomme la généralisation. |
| Renversement | Le renversement peut survenir chez le sujet après qu'un concept soit bien intériorisé. L'individu comprend alors assez bien le concept et la procédure qui a mené au concept pour pouvoir l'utiliser « à l'envers ». Supposons qu'une certaine série d'étapes aient mené à un résultat. Repartant de ce résultat, si le concept a été assez bien intériorisé, l'individu pourra l'utiliser pour retrouver la situation initiale en appliquant la procédure en sens inverse. Ce faisant, un nouveau concept est alors créé, celui qui est le processus inverse à celui déjà appris. |

FIGURE 3.3 – Différents types de constructions dans l'abstraction réfléchissante (basés sur [Dubinsky, 1991, p. 101] et [Cappetta et Zollman, 2013, p. 345]).

### 3.2.1 Action

Selon Piaget, un concept est, d'abord et avant tout, construit via des actions pouvant être faites sur celui-ci [Arnon et al., 2014, p. 19]. Le point de départ de la compréhension est donc, dans la théorie APOS, une *action* consistant en une transformation d'objets et de concepts qui est perçue comme externe à l'individu. Un sujet ayant une compréhension-action d'un objet devra donc faire des actions sur celui-ci, afin de le comprendre. L'action est dite externe au sens où, pour traiter le concept, le sujet devra explicitement réaliser des actions indiquées par des instructions.

Pour illustrer cette notion, utilisons l'exemple de la compréhension du concept d'intégrale en calcul, tirée du livre *APOS Theory* ([Arnon et al., 2014, p. 20-21]). Au départ, l'intégrale est définie comme étant l'aire sous la courbe d'une fonction sur un intervalle donné. Une première approche consiste à diviser l'aire sous la courbe en rectangles de mêmes bases et de hauteur égale à la courbe et, en sommant l'aire de ces rectangles, de calculer une première approximation de l'intégrale. À ce moment, on dira que le sujet a une compréhension-action du concept d'intégrale, puisqu'elle est basée sur une série d'actions faites, afin de donner un sens au concept. L'application des sommes de Riemann est donc une compréhension-action du concept d'intégrale.

### 3.2.2 Processus

Le *processus* est la deuxième étape de la compréhension dans la théorie APOS. Il survient lorsque le sujet répète une action suffisamment pour l'analyser et y réfléchir, afin de se former une image interne. Le processus se distingue donc de l'action au sens où il est perçue comme interne. En effet, l'individu prend l'action concrète et l'**intériorise** pour former un processus interne. Lorsque nous parlons d'une compréhension-processus dans la théorie APOS, il est question du stade où l'individu peut réfléchir sur la transformation, décrire le processus et même éventuellement l'inverser via le renversement (voir sous-section 3.1.2), le tout en n'ayant jamais à effectuer concrètement les actions.

Reprenant l'exemple de l'intégrale, nous dirons que l'action de faire des sommes de Riemann devient un processus lorsque le sujet est capable d'expliquer de manière générale les étapes du calcul de ces sommes pour des fonctions et des intervalles quelconques. De plus, on dira que l'individu a une compréhension-processus lorsqu'il est capable de décrire le fait que, lorsque la longeur des intervalles tend vers 0, la somme de Riemann tend vers l'aire sous la courbe, donc vers le concept d'intégrale. Dans cet exemple, on voit très clairement la distinction entre l'action et le processus en ce sens où le processus est vraiment interne. Il ne nécessite pas, en opposition à l'action, de calculer explicitement la somme de Riemann dans un exemple spécifique.

### 3.2.3 Objet

Le troisième élément de la théorie APOS est l'*objet*. Le terme objet dans cette théorie survient lorsque le processus est dorénavant perçu comme un tout, comme un objet cognitif [Trigueros et Oktaç, 2005, p. 162]. Le sujet a une compréhension-objet lorsqu'il est capable de voir un processus comme une entité sur laquelle il peut travailler et agir. Reprenant les termes de Piaget, nous dirons que l'objet est l'**encapsulation** du processus.

Dans l'exemple de l'intégrale, il a été vu précédemment que l'aire sous la courbe (i.e. l'intégrale) d'une fonction est la limite des sommes de Riemann. Lorsque l'individu commence à traiter l'existence de cette limite et à calculer sa valeur, l'intégrale prend forme dans sa tête et elle devient alors un objet mathématique à part entière. Le sujet possède à ce moment une compréhension-objet de l'intégrale, car elle est perçue comme un objet (une limite) qu'il peut calculer et manipuler. Ainsi, le processus qu'est la somme de Riemann a été encapsulé dans un objet mathématique : l'intégrale.

#### 3.2.4 Schème

Finalement, nous appellerons un *schème* l'ensemble des actions, des processus et des objets organisés de façon à former un cadre cohérent et complet pour la compréhension d'une situation problème ou d'un concept par l'individu. Notons qu'il est également possible qu'un schème contienne d'autres schèmes de concepts différents en lien avec le celui traité. En résumé, il s'agit de l'ensemble des notions nécessaires à un individu pour résoudre un problème utilisant le concept, pour donner un sens au concept, pour travailler le concept et même pour reconnaître les différentes situations dans lesquelles le concept s'applique.

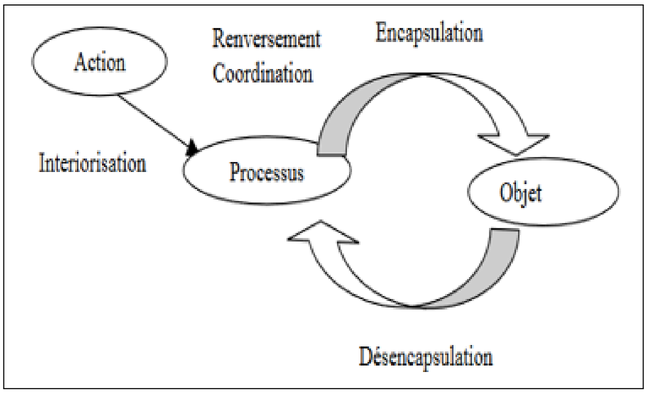


FIGURE 3.4 – Schème [Dubinsky et McDonald, 2002, p.162]

Regardons ce qu'un schème du concept d'intégrale pourrait contenir. Conformément à ce qui a été décrit plus tôt, il y aurait, entre autres, l'action de faire la somme de Riemann, le processus que sont les sommes de Riemann et l'objet de l'intégrale via la limite des sommes de Riemann. Il serait même possible d'aller plus loin et de dire que notre schème contient également les schèmes d'aire, de limite et de sommation. Il est important de comprendre qu'un schème est loin d'être unique. Il contient tout ce dont nous avons besoin pour analyser la compréhension d'un individu. Un schème peut ainsi être plus ou moins précis selon l'étude que nous voulons en faire.

### 3.3 Interactions des éléments de APOS

Jusqu'à présent, le lien entre la théorie et les travaux de Piaget n'est pas si explicite. En fait, dans la sous-section 3.1.2, cinq types de constructions de l'abstraction réfléchissante ont été expliqués. Ces constructions sont les fondements de APOS, car ils servent à expliquer comment chacun des trois éléments des schèmes de APOS interagissent ensemble. Certaines constructions ont déjà été détaillées plus haut, mais voyons un peu plus en détail en quoi les travaux de Piaget sont utiles dans la théorie APOS.

Comme mentionné précédemment, la notion d'intériorisation sert, dans APOS, à faire le pont entre l'action et le processus. On dira que l'action (externe) devient un processus lorsqu'elle est intériorisée. De même, nous avons mentionné que l'encapsulation survenait lorsque le processus devenait un objet. Dans APOS, on décrit également la notion de désencapsulation, qui survient lorsque l'individu repasse de l'objet au processus. Pour ce qui est du renversement et de la coordination qui ont un peu moins été traités, ils sont présents dans la compréhension-processus. En combinant certains processus, il est possible d'en former un nouveau (coordination). De plus, en analysant un processus inverse à celui déjà intériorisé, il est aussi possible d'en construire un nouveau (renversement). C'est ainsi que ces deux constructions apparaissent dans la théorie APOS. Bien que la généralisation n'apparaisse pas explicitement, c'est cette idée de Piaget que Dubinsky a cristallisée par les schèmes formés avec les actions, les processus et les objets. Les différentes interactions sont illustrées dans la Figure 3.4.

## 3.4 Visualisation et utilisation

Finalement, il est possible d'utiliser la théorie APOS afin de mieux visualiser les étapes de la compréhension qui transforment les objets en concept. L'une des utilités de APOS est de permettre de construire théoriquement un schème afin de visualiser la compréhension. On appelle une *décomposition génétique* le schème théorique formé par les chercheurs pour analyser les constructions mentales d'individus [Dubinsky et McDonald, 2002, p. 4]. La construction de décompositions génétiques via des schèmes sert à modéliser théoriquement les apprentissages d'un concept mathématique, afin de pouvoir analyser la progression de la compréhension d'un individu.

Bien que le modèle ait été présenté sous une certaine progression (A→P→O→S), il serait erroné de voir le cadre APOS comme étant linéaire. L'ordre dans lequel les différents éléments ont été présentés n'a été utilisé que pour expliquer ces notions, mais en pratique lorsqu'un individu développe sa compréhension d'un concept, les constructions ne absolument pas ordonnées d'une telle manière. Au contraire, les actions, les processus et les objets peuvent être utilisés pour résoudre différentes situation-problèmes, selon les besoins.

# Discussion

Dans la deuxième partie de cet essai, à la lumière des aspects abordés dans la partie théorique, certains concepts tirés de cours de mathématiques de niveau universitaire sont analysés. L'objectif principal est de regarder de manière critique certaines notions enseignées dans le cadre notamment de cours du baccalauréat en mathématiques, ainsi que la façon dont ces notions sont présentées aux étudiants. L'étude faite dans cette section portera sur des notions d'analyse et de logique vues généralement dans des cours de première année.

Les sujets traités dans cette partie proviennent, pour la plupart, de ma propre expérience de difficultés rencontrées au baccalauréat, mais également d'autres expériences acquises. Au cours de mes études à l'Université Laval, j'ai eu la chance de travailler à titre d'auxiliaire d'enseignement. Cela signifie donc que j'ai pu donner des séances de dépannage [6] dans certains cours du baccalauréat et également travailler au Centre de dépannage et d'apprentissage en mathématiques (CDA). [7] L'expérience acquise et les observations faites en tant qu'auxiliaire d'enseignement seront principalement utilisées comme point de départ des réflexions faites dans cet essai et serviront également à enrichir la discussion portant sur la compréhension en mathématiques. Bien qu'aucun étudiant n'ait officiellement été interrogé dans le cadre de cet essai, certains aspects traités ici sont issus d'observations et de discussions avec des étudiants dans mon rôle comme auxiliaire d'enseignement.

6. Dans certains cours, sur 4 heures de cours de mathématiques à l'Université Laval, un auxiliaire d'enseignement donne 1 heure en classe durant laquelle il fait des exercices pour les étudiants.

7. Le CDA est un service d'aide individuelle gratuite à l'Université Laval, où les étudiants ont la possibilité de rencontrer un consultant étudiant qui les aidera dans la résolution d'exercices proposés dans plusieurs cours du baccalauréat en mathématiques, en enseignement des mathématiques et en génie.

# 4 Notions d'analyse

À l'Université Laval, un étudiant en mathématiques aura à faire, au minimum, quatre cours d'analyse durant son baccalauréat (Analyse I, II, III et complexe). Au cours de mon propre baccalauréat, j'ai éprouvé de la difficulté au début de mes cours d'analyse. En rétrospective, je réalise que certaines lacunes présentes au tout départ en Analyse I m'ont suivi longtemps dans mon parcours universitaire. J'ai également pu observer certaines lacunes chez les étudiants en tant qu'auxiliaire. Deux d'entre elles seront abordées et étudiées en détail : les chaînes d'inégalités et la continuité exprimée en terme de « $\varepsilon$ et $\delta$ ».

## 4.1 Les chaînes d'inégalités

La première difficulté a été observée dans le cadre de dépannages en classe et lors de consultations au CDA avec des étudiants au baccalauréat. Dans plusieurs cours d'analyse (et même d'autres cours), il est courant en tant qu'auxiliaire de se faire poser des questions par des étudiants concernant des exercices avec de longues chaînes d'inégalités. Bien que l'objectif du numéro ne soit pas de traiter de chaînes d'inégalités, j'ai remarqué que, dans la plupart des cas, la difficulté des étudiants résidait dans la compréhension des inégalités présentes.

Dans de multiples preuves en analyse, il y a présence de chaînes d'inégalités. Par exemple, pour traiter de la convergence d'une suite, il est commun de la borner inférieurement et supérieurement par d'autres suites, dont nous connaissons les limites. Pour ce faire, il faut toutefois être à l'aise à traiter les inégalités. Pour essayer de comprendre un peu le problème, voyons un exemple tiré d'exercices du cours Analyse I à l'Université Laval tel que donné à la session d'hiver 2016.

**Exercice :**
Montrer que si $x \in \mathbb{R}$ satisfait $|x| < 2$, alors on a

$$\frac{1}{7} < \left|\frac{2x+5}{x-5}\right| < 3.$$

**Solution :**
On a

$$\left|\frac{2x+5}{x-5}\right| \overset{(1)}{\geq} \frac{|2x+5|}{|x|+5} \overset{(2)}{\geq} \frac{||2x|-5|}{|x|+5} \overset{(3)}{=} \frac{5-|2x|}{|x|+5} \overset{(4)}{>} \frac{5-4}{|x|+5} \overset{(5)}{>} \frac{5-4}{2+5} = \frac{1}{7}$$

et

$$\left|\frac{2x+5}{x-5}\right| \overset{(6)}{\leq} \frac{|2x|+5}{||x|-5|} \overset{(7)}{=} \frac{|2x|+5}{5-|x|} \overset{(8)}{<} \frac{4+5}{5-|x|} \overset{(9)}{<} \frac{4+5}{5-2} = 3.$$

Dans cet exemple, on voit plusieurs aspects importants tels que l'utilisation de l'inégalité triangulaire (inégalités 1, 2 et 6), la gestion des valeurs absolues (égalités 3 et 7), la gestion des fractions (inégalités 1, 5, 6 et 9) et l'utilisation de la condition initiale (inégalités 4, 5, 8 et 9). Lorsque je faisais le cours à l'époque, j'éprouvais beaucoup de difficultés à comprendre chacune des inégalités.

Attardons-nous d'abord aux égalités 3 et 7.

$$\frac{||2x|-5|}{|x|+5} \overset{(3)}{=} \frac{5-|2x|}{|x|+5}$$

$$\frac{|2x|+5}{||x|-5|} \overset{(7)}{=} \frac{|2x|+5}{5-|x|}$$

La difficulté ici est, selon moi, de comprendre le sens de la valeur absolue dans ce contexte. Dans l'équation 3, on nous dit en fait que les numérateurs des deux fractions sont égaux, donc que $||2x|-5| = 5-|2x|$. On s'intéresse donc à savoir quand est-ce que l'expression $|2x|-5$ sera positive. Comme la valeur maximale de $|2x|$ est 4, on a que $5-|2x|$ sera toujours positif et que $|2x|-5$ sera toujours négatif, d'où l'égalité 3. Par un argument semblable, on obtient également l'égalité 7. À quelques reprises, alors que je traitais une question similaire lors d'une consultation au CDA, je questionnais les étudiants sur ce qu'était la valeur absolue. Une réponse qui est revenue à quelques reprises est « la valeur absolue est une fonction ».[8] Ainsi, ce sera le point de départ de notre analyse de la valeur absolue dans le contexte de chaînes d'inégalités.

Regardons maintenant l'inégalité 1. La difficulté discutée est la même que celle présente dans les inégalités 5, 6 et 9.

$$\left|\frac{2x+5}{x-5}\right| \overset{(1)}{\geq} \frac{|2x+5|}{|x|+5}$$

On voit que pour obtenir cette inégalité nous devons gérer le quotient et utiliser l'inégalité triangulaire. En effet, de l'inégalité triangulaire, on obtient que $|x-5| \leq |x| + |-5| = x+5$. Donc, nous aurons que la fraction $\left|\frac{2x+5}{x-5}\right|$ aura un dénominateur plus petit que la fraction $\frac{|2x+5|}{|x|+5}$, ce qui implique qu'elle sera plus grande, d'où l'inégalité 1. Il s'agit d'un problème technique parfois difficile à gérer. Même si l'étude de ce problème est très intéressant, il ne sera pas abordé dans le cadre de cet essai.

De même, bien que l'utilisation de la condition initiale et de l'inégalité triangulaire puissent aussi causer problème dans ce type d'exercices, ces deux aspects seront laissés de côté.

8. Il est à noter que les étudiants en question étaient dans un cours où la définition telle que vue en analyse et présentée plus loin (Définition 1) n'avait pas encore été vue.

### 4.1.1 La problématique de la valeur absolue

Dans cette sous-section, la question à laquelle nous nous intéresserons en lien avec la valeur absolue est la suivante.

« Pourquoi est-il si difficile pour des étudiants
universitaires d'utiliser la valeur absolue pour traiter
des chaînes d'inégalités ? »

Il serait un peu trop optimiste de penser pouvoir répondre entièrement à cette question, mais nous tenterons tout de même d'étudier la question un peu plus en détail en se basant sur les deux théories présentées dans cet essai, afin de pouvoir bien comprendre la problématique.

Plus tôt, nous avons mentionné qu'il serait possible que le problème relève du fait que les étudiants perçoivent la valeur absolue comme étant une fonction plutôt qu'un opérateur unaire. En effet, il m'est arrivé à plusieurs reprises d'avoir des discussions avec des étudiants au CDA sur le fait que la valeur absolue, en plus d'être une fonction, pouvait être vue comme un opérateur. D'où vient alors cette conception de fonction ?

Selon la Progression des apprentissages au secondaire du Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement Supérieur du Québec, la notion de valeur absolue est introduite dans les cours de mathématiques, dès la première année du secondaire [PDA, 2016, p. 8]. À ce moment, la valeur absolue est utilisée comme un opérateur. Les élèves du secondaire apprennent, par exemple, que $|3| = 3$ et que $|-3| = 3$. L'idée que la valeur absolue « rend positif un nombre » est donc introduite assez tôt aux élèves. Un peu plus tard dans le programme, dans les cours SN de secondaire 5, la fonction valeur absolue est introduite [PDA, 2016, p. 19]. Cette dernière est définie comme suit (où $a, b, h, k \in \mathbb{R}$ sont des paramètres) :

$$f(x) = a|b(x-h)| + k.$$

Graphiquement, si on représente la fonction valeur absolue $f(x) = |x|$, on trouve donc une fonction qui est toujours positive (voir Figure 4.5). L'étudiant apprend ensuite à modifier les paramètres de la fonction pour la dessiner, trouver son image, trouver ses zéros, etc. À ce moment, l'image qu'à l'étudiant de la valeur absolue pourrait être celle d'une fonction, au même titre que les fonctions quadratiques et rationnelles, vues aussi au secondaire.

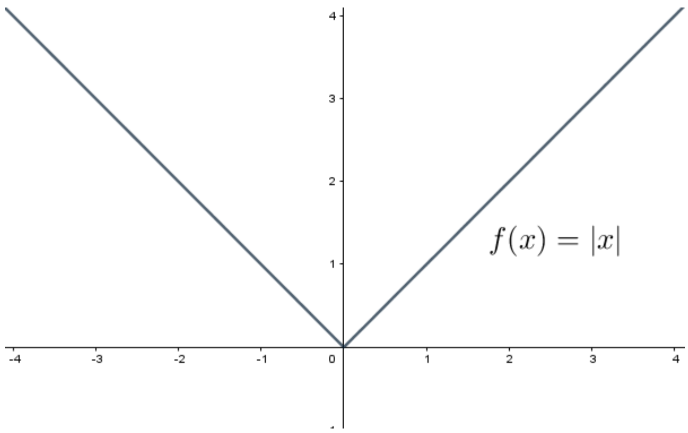


FIGURE 4.5 – Fonction valeur absolue

### 4.1.2 Études des schèmes

Étudions maintenant ce que nous venons de voir, mais avec un outil théorique, la théorie APOS de la section 3. Analysons la compréhension possible d'étudiants de mathématiques SN de la valeur absolue à la sortie du secondaire, par rapport à ce que nous venons de voir. [9] Afin de représenter ce que pourrait être la compréhension de la valeur absolue par un élève, j'ai construit un schème possible. Celui-ci est représenté dans la Figure 4.6.

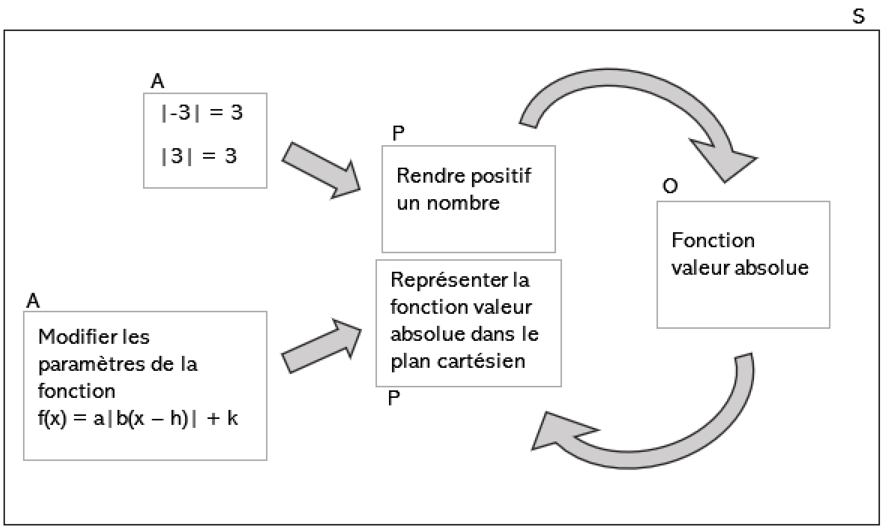


FIGURE 4.6 – Schème possible de la notion de valeur absolue d'un élève à la fin de la $5^e$ secondaire

Reprenant la description de la valeur absolue au secondaire faite plus tôt, on peut capturer les éléments importants en actions, en processus et en un objet. L'idée d'évaluer la valeur absolue dans des cas concrets et d'agir sur la fonction via ses paramètres sont les actions possiblement faites par des élèves du secondaire. Cette dernière est ensuite intériorisée dans deux processus : rendre positif un nombre et faire le graphique de la fonction valeur

9. Étant donné que nous nous intéressons ici ultimement à des cours du baccalauréat en mathématiques, nous considérerons les élèves issus des cours de mathématiques SN, plutôt que CST ou TS. Bien qu'il aurait pu être intéressant de regarder le contenu de ces autres cours, dans le cadre de cet essai, nous traiterons seulement des cours SN.

absolue. Éventuellement, ces aspects peuvent être encapsulés pour former l'objet qui est la fonction valeur absolue. Ainsi, il serait possible de croire qu'à la sortie de l'école secondaire, un élève ayant fait son cours de mathématiques SN se retrouve avec l'image de la valeur absolue comme étant une **fonction** et non un opérateur.

⋆ **Remarque 4.1**
Par fonction, on fait référence à la notion telle que vue dans le cadre de cours au secondaire, c'est à dire une relation entre deux variables avec une correspondance qui associe à chaque valeur du domaine au plus une valeur de l'image. De plus, une fonction au secondaire est souvent associée à sa représentation dans le plan cartésien. Les notions de fonctions et de représentation dans le plan de fonctions ne sont pas toujours distinguées clairement. Par opérateur, on fait référence à un symbole représentant une opération unaire. Dans le cas présent, la valeur absolue vue comme un opérateur est le symbole $|\cdot|$ qui représente l'opération de rendre un nombre positif.

Revenons maintenant à l'égalité 3 de l'exemple présenté au début du chapitre.

$$\frac{||2x|-5|}{|x|+5} \overset{(3)}{=} \frac{5-|2x|}{|x|+5}$$

Les dénominateurs étant égaux, concentrons-nous seulement sur les numérateurs présents dans l'équation.

$$||2x|-5| = 5-|2x|$$

Comment est-il possible de donner un sens à cette équation sachant que la valeur absolue est traitée comme une fonction ? Tout d'abord, nous ne pourrions même pas dessiner le graphique, car la partie de gauche de l'équation possède deux valeurs absolues et n'est donc même pas de la forme $f(x) = a|b(x-h)|+k$. De plus, rappelons que nous sommes dans la solution de l'exercice. Ainsi, le membre de droite de l'équation est ce qu'on cherche. On veut donc résoudre

$$||2x|-5| =?$$

Il est aisé, selon ce point de vue, de comprendre pourquoi il peut être très difficile pour un étudiant d'utiliser la valeur absolue dans ce contexte si l'image interne qu'il a est celle d'une fonction.

Voyons maintenant ce que l'on voudrait que l'étudiant connaisse de la valeur absolue pour résoudre ce type de problème. Dans les cours d'analyse à l'université, la valeur absolue est un opérateur largement utilisé. Une définition classique donnée de la valeur absolue est la suivante.

**Définition 1**

Si $a$ est un nombre réel quelconque, la **valeur absolue** de $a$ que l'on désigne par $|a|$ est définie par

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0, \\ -a & \text{si } a \leq 0. \end{cases}$$

[Cassidy et Lavertu, 1994, p. 8]

Avec cette dernière définition, l'équation à résoudre devient triviale.

$$||2x| - 5| = ?$$

Pour la résoudre à l'aide de la Définition 1, il faut simplement se questionner à savoir si $|2x| - 5$ est positif ou négatif. Comme nous savons que $|x| < 2$, l'expression est négative et on peut alors conclure que

$$||2x| - 5| = -\big(|2x| - 5\big) = 5 - |2x|.$$

Cette dernière explication semble tellement simple et logique qu'il est difficile pour quelqu'un qui est à l'aise avec la Définition 1 de concevoir qu'un étudiant puisse avoir de la difficulté à comprendre ceci. Notons qu'il est possible qu'un élève du secondaire ait vu la Définition 1 (ou l'équivalent) dans ses cours, mais puisque la seule vraie application de la valeur absolue faite est celle de fonction, il est normal de croire que c'est cette image interne que l'élève conserve à la fin de ses études secondaires. Il est également possible que même si l'élève a vu cette définition au secondaire, il l'ait oublié étant donné qu'elle est peu utilisée avant l'université.

Comme il a été fait pour l'élève du secondaire, intéressons-nous à voir à quoi pourrait ressembler un schème pour la valeur absolue, tel que voulu par le professeur du cours universitaire. Ce schème est représenté à la Figure 4.7.

Les notions importantes en analyse lorsque la valeur absolue est vue sont tirées d'un livre d'introduction à l'analyse [Cassidy et Lavertu, 1994, p. 7-9]. Lorsque la valeur absolue est introduite dans ce livre, on aborde l'évaluation de la valeur absolue, l'utilisation de la valeur absolue comme une distance, sa valeur maximale et sa valeur minimale. Dans tout les cas, la valeur absolue est présentée comme un opérateur. Ainsi, il serait possible de penser qu'un professeur de mathématiques à l'université s'attend à ce qu'un étudiant voit la valeur absolue comme un opérateur et/ou comme une distance sur la droite numérique. On parle également de la fonction valeur absolue, mais davantage comme un exemple (dans la section Fonctions continues) que comme un objet d'étude.

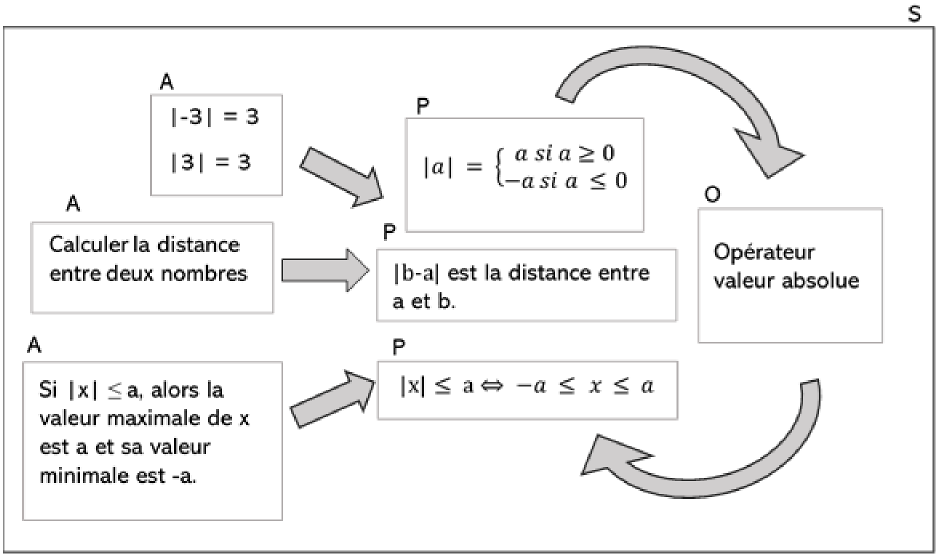


FIGURE 4.7 – Schème possible de la notion de valeur absolue auquel le professeur s'atendrait

En comparant les deux schèmes construits (Fig. 4.6 et Fig. 4.7), on s'aperçoit rapidement que les deux visualisations diffèrent en plusieurs aspects et qu'il est normal que l'utilisation de la valeur absolue dans des chaînes d'inégalités puisse poser problème. Il n'est également pas très difficile de pallier ce problème simplement en mettant l'emphase sur le fait que la valeur absolue est un opérateur, en plus d'être une fonction.

### 4.1.3 Notion de distance

Pour aller un peu plus loin, voyons un deuxième exemple traitant d'inégalités et de valeurs absolues, mais d'une manière différente. En mathématiques, la valeur absolue peut parfois être utilisée pour représenter une distance entre deux points sur la droite numérique. Techniquement, la définition formelle de distance n'est pas abordée avant le cours d'Analyse III à l'Université Laval. Toutefois, il est commun que des étudiants soient familiés avec les liens entre la valeur absolue et l'idée de distance.

Voici un numéro tiré de séries d'exercices du cours Éléments de mathématiques (MAT-1300), tel que donné à l'Université Laval à la session d'automne 2019. À l'Université Laval, les étudiants en mathématiques et en enseignement des mathématiques suivent, à leur première session [10], le cours d'Éléments de mathématiques. Il s'agit d'un cours d'introduction dans lequel on aborde pour la première fois les techniques de preuves, la logique formelle, le symbolisme mathématique, la théorie des ensembles, les fonctions, etc. Dans ce cours, les étudiants doivent, à de multiples reprises, utiliser des chaînes d'inégalités, mais sans nécessairement avoir beaucoup travaillé cela et surtout sans avoir suivi de cours d'analyse. L'élément important dont nous discuterons a été mis en couleur

10. À l'exception des étudiants ayant commencé leur baccalauréat à l'hiver, qui suivront ce cours à leur deuxième session.

dans la solution de l'exercice.

**Exercice :**
Soit $f(x) := x^2 - x$, définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f^{-1}([-2,1])$.
**Solution :**
Par définition, $f^{-1}([-2,1]) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [-2,1]\}$.

$$\begin{aligned} f(x) \in [-2,1] &\Leftrightarrow -2 \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{7}{4} \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4} \\ &\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Rép. : $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Cet exercice est en lien avec les deux éléments suivants, présents dans le schème de la Figure 4.7 :

- $|b - a|$ est la distance entre $a$ et $b$.
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

Dans l'exercice, nous avions l'énoncé suivant (qui avait été mis en **couleur**) :

$$-\frac{7}{4} \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Il y a plusieurs choses à comprendre dans cet énoncé. Tout d'abord, comme $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ est toujours positif, nous pourrions écrire

$$-\frac{7}{4} \leq \left|x - \frac{1}{2}\right|^2 \leq \frac{5}{4}.$$

Ainsi, l'expression du centre est toujours positive et donc toujours plus grande que $-\frac{7}{4}$. On se retrouve alors avec l'expression suivante :

$$\left|x - \frac{1}{2}\right|^2 \leq \frac{5}{4}.$$

En prenant la racine de chaque côté, nous avons

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

À cette étape, il y a deux façons de compléter l'exercice. En utilisant l'équivalence du deuxième point $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$, nous obtenons directement que $-\frac{\sqrt{5}}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$. Toutefois, il est possible que les étudiants ne connaissent pas cette équivalence. Lors d'une de mes séances de dépannage, j'ai du expliquer cette équivalence aux étudiants.

Une façon de le faire est de passer par la notion de distance.

Dans l'exemple, on pourrait voir l'expression suivante $\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ comme le fait que la distance sur la droite numérique entre $x$ et $\frac{1}{2}$ ne peut pas être plus grande que $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

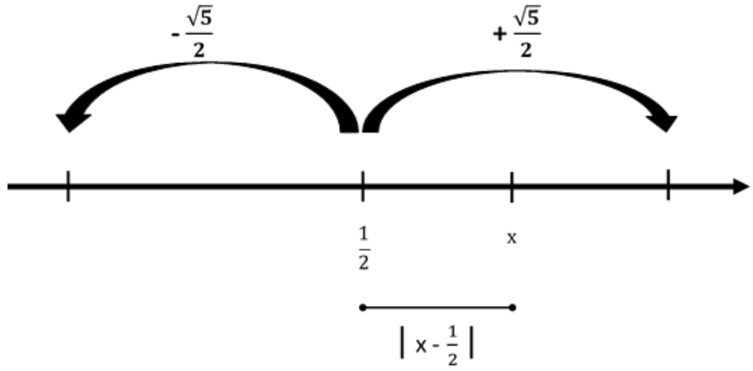


FIGURE 4.8 – Représentation de la distance entre deux points sur une droite et valeur absolue

Ainsi, la valeur de $x - \frac{1}{2}$ est au plus $\frac{\sqrt{5}}{2}$ et au minimum $-\frac{\sqrt{5}}{2}$. La Figure 4.8 représente l'exemple sur une droite numérique. Avec ce lien entre la distance et la valeur absolue, l'étudiant peut trouver l'équivalence

$$-\frac{\sqrt{5}}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

sans avoir à connaître

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

### 4.1.4 Résumé

Il y a plusieurs façons de voir la valeur absolue. Plusieurs manières de se représenter la valeur absolue ont été présentées dans cette section. L'aspect le plus important à retenir de ce que la théorie APOS a amené ici est qu'il est important de se questionner pour savoir ce que les étudiants savent et ce qu'ils ont besoin de savoir pour comprendre les notions abordées. Même si au départ il n'était pas clair d'où provenait la difficulté, l'utilisation de APOS nous a permis de mieux nous représenter les possibles difficultés des étudiants, en comparant deux schèmes possibles pour la notion de valeur absolue.

Même si la distance peut souvent être une bonne façon de voir les inégalités avec des valeurs absolues, il ne sera pas toujours possible d'utiliser cette représentation. C'est pourquoi chacun des processus présentés à la Figure 4.7 est important en ce sens que lorsque l'étudiant traite de l'objet de la valeur absolue, ayant déjà encapsulé plusieurs processus différents en lien, il peut utiliser celui dont il a besoin. C'est ce qu'on a nommé la dés-encapsulation dans la théorie APOS, c'est-à-dire l'idée de revenir au processus pour utiliser l'objet.

## 4.2 La continuité exprimée avec $\varepsilon$ et $\delta$

La prochaine difficulté dont nous discuterons en est une que j'ai vécue dans mes cours d'analyse au baccalauréat (surtout en Analyse I et II). Elle réside dans la compréhension de la notion de continuité et de sa définition formelle exprimée avec $\varepsilon$ et $\delta$.

### 4.2.1 Définition de la continuité

Pour un étudiant au baccalauréat, la notion de la continuité d'une fonction n'est pas nouvelle. Intuitivement, un étudiant en première année au baccalauréat en mathématiques devrait normalement pouvoir utiliser et parler de continuité. Toutefois, il est rare que la définition formelle soit connue des étudiants avant leur premier cours d'analyse. Dans un premier cours d'analyse, la définition classique de la continuité d'une fonction en un point de son domaine est présentée à la Définition 2.

**Définition 2**

La fonction $f$ est **continue en** $a$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Basé sur [Cassidy et Lavertu, 1994, p. 75]

Une façon d'interpréter cette définition est que si nous perturbons *légèrement* la valeur en un point $x_0$ dans le domaine de $f$, la valeur de $f(x_0)$ devrait elle aussi varier *légèrement* et ce peu importe la variation. En d'autres mots, il n'y a pas de saut ou de trou dans la fonction $f$. De plus, une autre intuition fréquente de la continuité d'une fonction est que lorsque nous représentons la fonction dans un plan cartésien, nous ne levons pas la crayon de la feuille. Finalement, pour des étudiants ayant fait du calcul différentiel, une autre façon de se représenter la continuité en un point $x_0$ est de dire que la limite de la fonction vers $x_0$ est égale à la valeur de la fonction en $x_0$.

La définition présentée précédemment caractérise et écrit de manière un peu plus formelle ces intuitions. Remarquons que, même si les façons d'interpréter la continuité discutées ici peuvent aider l'étudiant à se représenter ce concept, aucune d'elle n'est équivalente à la Définition 2. En effet, il existe des fonctions qui ne répondent à aucune des interprétations précédentes, mais qui satisfont la Définition 2.

### 4.2.2 Aspects de la compréhension

Regardons les points importants qui composent la Définition 2. Tout d'abord, il y a l'aspect du symbolisme. Cette définition est abstraite et générale ; pour bien saisir l'idée qu'elle représente, il faut comprendre la signification de tous les symboles présents. Il y a la présence des variables $\varepsilon$ et $\delta$, qui viennent en quelque sorte capturer l'intuition de « variation légère ». Il y au aussi la présence de quantificateurs ($\forall$ et $\exists$) qui illustrent l'idée de « peu importe » la variation (i.e. pour toute variation). Il y a la présence des valeurs absolues pour représenter la distance entre les valeurs et finalement, le symbole d'implication $\Rightarrow$ pour l'aspect logique de la définition. Pour bien comprendre et voir ce que la définition représente, il faut connaître et comprendre l'utilité de chacun des symboles.

Ensuite, il faut également saisir comment les éléments interagissent entre eux. La Figure 4.9 représente dans le plan cartésien les éléments de la Définition 2. Il s'agit d'un dessin classique inspiré de ce que l'on retrouve dans la majorité des livres d'analyse de base. Pour un $\varepsilon$ donné, on a formé un intervalle de longueur $2\varepsilon$ autour de $f(x_0)$. On a ensuite trouvé un $\delta$ de telle sorte que dans l'intervalle $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ l'image de la fonction ne sortait pas de l'intervalle $[f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon]$. Les quantificateurs indiquent que peu importe la valeur de $\varepsilon$, on trouvera un $\delta$ assez petit qui fonctionnera.

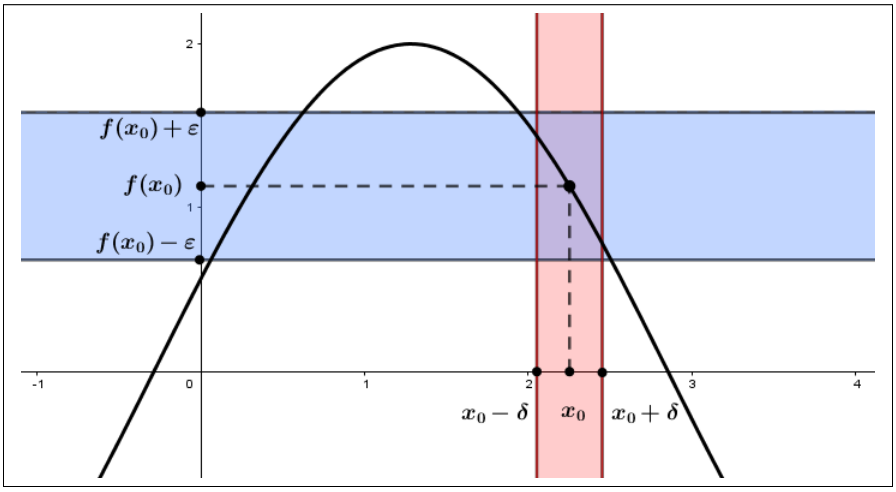


FIGURE 4.9 – Schéma de la continuité d'une fonction en un point $x_0$

Le travail que nous venons de faire est, en terme de la théorie APOS, une décomposition génétique de différents éléments qui interviennent dans le schème de la continuité d'une fonction en un point de son domaine (exprimée selon la définition formelle en terme de $\varepsilon$ et de $\delta$). Cette décomposition est illustrée à la Figure 4.10. Rappelons qu'il s'agit d'une décomposition génétique et non de la décomposition génétique, car celle-ci n'est pas unique. Nous avons utilisé seulement les éléments nécessaires à l'analyse que nous faisons

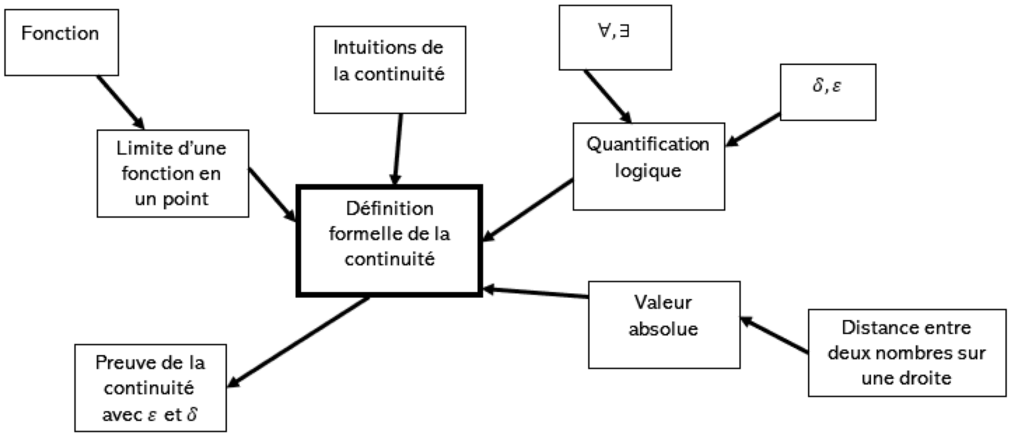


Figure 4.10 – Décomposition génétique de la continuité

dans cet essai.

À l'aide de la décomposition faite (inspirée de la théorie d'Ed Dubinsky), nous avons maintenant une vue plus globale des éléments clés à comprendre pour bien pouvoir saisir l'idée de la définition formelle de la continuité en analyse. La mauvaise compréhension de n'importe lequel des éléments de la Figure 4.10 peut nuire considérablement à la compréhension de la Définition 2, voire même l'empêcher. Il est donc pertinent de garder en tête cette décomposition. Dans la Figure 4.10, nous avons représenté les différents schèmes qui interviennent, mais nous n'avons pas détaillé jusqu'à illustrer les actions, les processus et les objets.

Par exemple, un étudiant n'ayant pas du tout l'intuition de ce que représente la continuité ne l'aura probablement pas davantage lors de l'étude de la Définition 2. De même, si l'étudiant ne voit pas que la valeur absolue représente ici des distances, il ne pourra sans doute pas comprendre la définition formelle non plus.

Comme j'ai eu la chance de revoir ces notions avec des étudiants lors de consultations au CDA, j'ai pu observer que les éléments les plus problématiques dans la décomposition de la Figure 4.10 sont la signification de la valeur absolue, les quantificateurs ($\forall$ et $\exists$), ainsi que les variables $\varepsilon$ et $\delta$.

La valeur absolue a déjà été abordée en détail dans la section 4.1.1, nous n'y reviendrons donc pas davantage. De plus, les quantificateurs seront le sujet de la sous-section 5.2. L'élément que nous aborderons un peu plus en détail ici est donc la présence des variables $\epsilon$ et $\delta$ et leur signification dans la Définition 2.

#### 4.2.3 $\varepsilon$ et $\delta$

Lors de mes consultations au CDA, il est arrivé à de nombreuses reprises que des étudiants viennent poser des questions sur la continuité et, plus particulièrement sur $\varepsilon$ et $\delta$. Les plus récurrentes sont :

1. Qu'est-ce que $\varepsilon$ ?
2. Quelle valeur prend $\varepsilon$ ?
3. Comment trouver $\varepsilon$ et $\delta$ ?

Dans une premier cours d'analyse, il peut être difficile de bien comprendre l'idée que caractérisent les variables $\varepsilon$ et $\delta$. Revenons à l'aspect évoqué en lien avec la décomposition génétique. Nous avions discuté du fait que $\varepsilon$ et $\delta$ servaient à représenter de légères variations autour de $x_0$ et $f(x_0)$. Si le seul travail de compréhension fait avec $\varepsilon$ et $\delta$ consiste à donner une intuition, il est pertinent de se demander si l'étudiant comprend vraiment l'intérêt de ces variables dans la définition. Intéressons-nous un peu plus en détail au schème des variables $\varepsilon$ et $\delta$ présent dans la Figure 4.10.

Pour détailler un schème représentant les notions de $\varepsilon$ et $\delta$, nous aurons besoin de voir quelles actions et quels processus peuvent mener à l'encapsulation en tant qu'objet de ces notions.

Actions : Voici quelques exemples d'action que l'étudiant peut faire lorsqu'il effectue des exercices, afin de manipuler $\varepsilon$ et $\delta$ et intérioriser ces notions.

- Représenter la fonction dans $\mathbb{R}^2$ et, pour un epsilon donné et un point $x_0$, tracer l'intervalle $[f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon]$. Tenter de trouver un (ou même plusieurs) intervalle $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ qui fonctionne dans la Définition 2. Refaire la même chose avec un point de discontinuité.
- Pour une fonction $f$ donnée, un point du domaine de $f$ et une valeur de $\varepsilon$, trouver une valeur de $\delta$ qui satisfait à la Définition 2.
- Étudier plusieurs exemples et plusieurs contre-exemples différents.

L'exemple suivant est un bon exemple d'exercice décrit au deuxième point. Il est tiré d'un travail pratique donné dans le cours d'Analyse I à la session d'hiver 2016.

**Exercice :**
Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, soit $a = \frac{1}{2}$, et soit $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Trouver un $\delta > 0$ tel que

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon.$$

En manipulant seulement les notions de $\varepsilon$ et de $\delta$ sans forcément traiter directement de continuité, les étudiants ont l'opportunité d'intérioriser davantage ces notions et d'en renforcer l'image. Ce faisant, comme ces notions ont un grand impact dans la décomposition génétique de la définition formelle de la continuité, ce genre d'exercice prend tout son sens et devient, en quelque sorte, nécessaire à la compréhension de la continuité si on se base sur la théorie APOS.

Processus : Un processus qui pourrait être issu de l'intériorisation des actions présentées précédemment est l'idée que pour une fonction $f$ et un point $x_0$ de son domaine, peu importe le $\varepsilon$ donné, il faut regarder s'il est possible de trouver un $\delta$ de telle sorte que

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Lorsque ce processus est bien compris de l'étudiant, celui-ci peut alors être encapsulé en objets mathématiques $\varepsilon$ et $\delta$. Plus les éléments du schème décrit ici seront présents et détaillés chez l'étudiant, plus l'idée de $\varepsilon$ et $\delta$ sera comprise de l'étudiant et plus l'étude de la continuité formelle sera facilité.

#### 4.2.4 Résumé

À l'aide de la théorie APOS, il a été possible de voir une représentation un peu plus globale de la notion de continuité formelle en analyse. La décomposition en schème permet de voir les éléments pouvant éventuellement poser problème à la compréhension de la Définition 2. De plus, en représentant de manière explicite un schème (comme à la sous-section précédente), il est possible de voir quel type d'exercices peut être pertinent pour favoriser la compréhension des étudiants.

Avec l'expérience, je réalise que, lorsque je devais effectuer un preuve de la continuité d'une fonction en un point, il aurait été pertinent pour moi de passer plus de temps à tenter de comprendre chacun des éléments de la Figure 4.10 individuellement, en particulier $\varepsilon$ et $\delta$. Je comprenais la définition, mais pas le rôle et la signification de chacune des notions présentes dans la décomposition génétique faite dans cet essai. Je constate aujourd'hui qu'en ayant une vision beaucoup plus globale de la notion de continuité, je la comprends beaucoup mieux (mieux que lorsque je faisais encore des cours d'analyse).

# 5 Le symbolisme et la logique

Dans les premiers cours du baccalauréat en mathématiques, les étudiants ont un cours d'introduction à la logique formelle. À l'Université Laval, c'est dans le cours Éléments de mathématiques (MAT-1300) que sont vues les premières notions de valeur de vérité, d'équivalence logique, de quantificateur, etc. Pour la plupart des étudiants, c'est la première fois qu'ils sont confrontés à ce genre de matière. Évidemment, lorsque l'on traite de logique formelle, on utilise beaucoup de notations. Bien que très utile (et très présent) en mathématiques, le symbolisme peut parfois causer certains problèmes de compréhension chez les étudiants.

L'objectif ici sera donc de discuter, toujours en lien avec les théories, de ces difficultés liées à la compréhension de notions de logique, en portant une attention particulière au symbolisme. Nous nous intéresserons plus spécifiquement à équivalence logique et aux quantificateurs logiques.

## 5.1 Valeurs de vérité et équivalences logiques

Au cours de ma maîtrise, via du tutorat, des dépannages en classe et des consultations au CDA, j'ai été témoin de plusieurs problèmes de compréhension en lien avec les énoncés logiques. Bien que les étudiants aient vu les définitions et les tables de vérités des différents connecteurs logiques, mon impression est que dans certains cas, ils ne gardent pas d'image claire de ce que les différents énoncés signifient. Nous allons essayer de voir un peu plus en détail ceci avec un exemple détaillé et avec l'aide de la théorie de Pirie et de Kieren, mais avant tout, nous aurons besoin de quelques notions de base en logique.

### 5.1.1 Notions préalables

En premier lieu, nous allons définir les éléments importants dont il sera question dans cette section. En logique, on s'intéresse à la vérité d'un énoncé. Pour ce faire, on utilise le concept de proposition.

**Définition 3**

Une **proposition** est un énoncé qui est ou bien vrai ou bien faux.
La **valeur de vérité** d'une proposition est l'évaluation la valeur que peut prendre la proposition (vrai ou faux).

Inspiré de [Levesque, 2007, p. 2]

Pour étudier les propositions, nous utilisons des connecteurs. Pour cet essai, nous présenterons les cinq connecteurs : la négation, le conditionnel (aussi appelé l'implication), la conjonction, la disjonction et le biconditionnel. Les valeurs de vérité des cinq connecteurs sont présentées dans les tableaux de la Figure 5.11. Nous utiliserons la plupart de ces connecteurs, mais celui qui nous intéressera le plus est l'implication (conditionnel).

**Négation**

| P | ¬ P |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

**Conditionnel**

| P | Q | P ⇒ Q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

**Conjonction**

| P | Q | P ∧ Q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

**Disjonction**

| P | Q | P ∨ Q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

**Biconditionnel**

| P | Q | P ⇔ Q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

Figure 5.11 – Tables de vérité de la négation, du conditionnel, de la conjonction, de la disjonction et du biconditionnel. [Levesque, 2007, p. 2-3]

Comme nous discuterons beaucoup de l'implication, notons également que dans $P \Rightarrow Q$, on nomme $P$ l'**antécédent** et $Q$ le **conséquent**.

La dernière notion dont nous aurons besoin est celle d'équivalence logique. Cette notion sert, entre autres, à voir si deux propositions ont les mêmes valeurs de vérités.

**Définition 4**

Deux propositions $P$ et $Q$ sont dites **logiquement équivalentes** lorsque le bicondtionnel $P \Leftrightarrow Q$ est une tautologie (i.e. est toujours vrai). Le symbole pour désigner l'équivalence logique est $\equiv$.

[Chapdelaine et Hodgson, 2015, p. 35]

En d'autres mots, on dira que deux propositions sont logiquement équivalentes si leur table de vérité prend exactement les mêmes valeurs. Dans un cours d'introduction à la logique, les étudiants sont amenés à se questionner sur l'équivalence logique entre deux énoncés. Dans le cours Éléments de mathématiques, notamment, les équivalences logiques sont le sujet d'une grande partie des questions présentes dans les séries d'exercices.

Finalement, pour cet essai, nous introduirons un point de vue intéressant présenté dans les notes de cours de Bernard R. Hodgson et Hugo Chapdelaine. Comme notre objectif ici est de comprendre ce que signifie un peu plus en profondeur le symbole $P \Rightarrow Q$ ou, plus précisément, ce que signifie le symbole d'implication ($\Rightarrow$), essayons de voir comment cette notion est verbalisée dans les notes de cours.

En essayant d'oublier le symbole $\Rightarrow$, regardons comment il serait possible de dire « en français » la notion d'implication. Voici quelques exemples tirés de ces notes de cours [Chapdelaine et Hodgson, 2015, p. 26] :

— *$P$ implique $Q$*

— *$Q$ est une conséquence de $P$*

— *Si $P$ alors $Q$*

— *$P$ à la condition que $Q$*

En reformulant, on pourrait dire que *si $P$ est vrai, alors $Q$ le sera aussi* ou que *$P$ est vrai implique que $Q$ est vrai.* L'utilisation de vocabulaire est intéressante, car il nous permet de comprendre un peu mieux ce que représente de symbole de l'implication $\Rightarrow$.

### 5.1.2 Exemple détaillé

Maintenant que les notions de bases ont été définies, voyons un exemple détaillé qui pose parfois problème aux étudiants. Cet exemple est tiré d'exercices du cours Éléments de mathématiques donné aux sessions d'automne 2015 et d'automne 2019. Comme mentionné plus tôt, cet exercice a été choisi puisqu'il est arrivé à de nombreuses reprises que l'on me demande de l'expliquer.

> **Exercice :**
> Écrire la proposition suivante en n'utilisant que les symboles $\neg$ et $\wedge$.
>
> $$P \Rightarrow (Q \Rightarrow (R \Rightarrow S)).$$
>
> **Solution :**
> On sait que $T \Rightarrow U$ est logiquement équivalente à $\neg(T \wedge \neg U)$. Donc,
>
> $$\begin{aligned} P \Rightarrow (Q \Rightarrow (R \Rightarrow S)) &\equiv P \Rightarrow (Q \Rightarrow \neg(R \wedge \neg S)) \\ &\equiv P \Rightarrow (\neg(Q \wedge \neg\neg(R \wedge \neg S)) \\ &\equiv \neg(P \wedge \neg\neg(Q \wedge \neg\neg(R \wedge \neg S)) \end{aligned}$$
>
> Puisque $\neg\neg T \equiv T$, on a
>
> $$P \Rightarrow (Q \Rightarrow (R \Rightarrow S)) \equiv \neg(P \wedge (Q \wedge (R \wedge \neg S))) \equiv \neg(P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S).$$
>
> On peut écrire $X \wedge Y \wedge Z$ au lieu de $X \wedge (Y \wedge Z)$ ou $(X \wedge Y) \wedge Z$ car ces 2 dernières sont logiquement équivalentes.

Le point important de la solution pour comprendre cet exercice est, selon moi, l'équivalence de la première ligne de l'explication :

$$T \Rightarrow U \equiv \neg(T \wedge \neg U). \tag{1}$$

Ainsi, si nous regardons l'énoncé logique de l'exercice, nous pouvons remplacer l'expression $R \Rightarrow S$ par $\neg(R \wedge \neg S)$ en utilisant l'équation (1) avec $T = R$ et $U = S$. De même, en prenant $T = Q$ et $U = \neg(R \wedge \neg S)$, nous obtenons la deuxième équivalence dans la chaîne d'équivalences de la solution ce qui donne $P \Rightarrow (\neg(Q \wedge \neg\neg(R \wedge \neg S))$. Finalement, on peut obtenir la troisième équivalence. Pour ce qui est de la suite de la preuve, elle est relativement simple à comprendre et ne pose, selon moi, pas problème aux étudiants. Les problèmes de compréhension dans un tel exercice résideraient donc dans la compréhension de l'équivalence (1).

Donc, pour résoudre ce numéro, il serait suffisant d'apprendre par cœur l'équivalence (1). Or, notre objectif ici est de voir comment il est possible de comprendre l'exercice et non seulement de le réussir. De plus, ce n'est pas la seule équivalence qui est en lien avec l'expression $T \Rightarrow U$. Il y a également ces autres équivalences :

$$T \Rightarrow U \equiv \neg T \vee U$$

$$T \Rightarrow U \equiv \neg U \Rightarrow \neg T$$

Essayons donc de voir comment il est possible de comprendre et de donner un sens à l'expression (1). Pour ce faire, revenons à la table de vérité de l'implication, présentée à nouveau dans la Figure 5.12.

| | T | U | T ⇒ U |
|---|---|---|---|
| 1 | V | V | V |
| 2 | V | F | F |
| 3 | F | V | V |
| 4 | F | F | V |

FIGURE 5.12 – Table de vérité de l'implication (du conditionnel)

Nous voyons dans la Figure 5.12 que le conditionnel est vrai pour toutes les valeurs de vérité de $T$ et de $U$, sauf lorsque $T$ est vraie et que $U$ est fausse (à la deuxième ligne). Nous allons essayer, comme il a été fait dans la section de notions préalables, de voir au-delà du symbole $\Rightarrow$ et de trouver comment il serait possible de verbaliser l'énoncé $P \Rightarrow Q$.

Dire que $T \Rightarrow U$ est vrai reviendrait à dire que nous sommes aux lignes 1, 3 ou 4 de la table de vérité. Nous appellerons ceci la situation 1. Également, nous pourrions dire que $T \Rightarrow U$ est vraie si nous ne sommes pas à la ligne 2 de la table de vérité. Ceci sera la situation 2.

Situation 1 :

La situation 1 est celle dans laquelle nous sommes soit à la ligne 1, soit à la ligne 3, soit à la ligne 4. En d'autres mots, nous pourrions décrire cette situation en disant que nous avons soit que $T$ est fausse (lignes 3 et 4) ou bien que $U$ est vraie (lignes 1 et 3). Ainsi, on pourrait verbaliser ceci en disant que

$T$ implique $U$ est équivalent à dire que
$T$ prend la valeur faux ou que $U$ prend la valeur vrai.

Également, nous pourrions synthétiser ceci en disant que

$T$ implique $U$ est équivalent à dire que « non » $T$ ou que $U$.

En utilisant la notation de logique,

| $T$ | implique | $U$ | est équivalent à dire que | « non » | $T$ | ou | que $U$. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $\Rightarrow$ | $U$ | $\equiv$ | $\neg$ | $T$ | $\vee$ | $U$ |

Donc, nous avons que $T \Rightarrow U \equiv \neg T \vee U$.

Situation 2 :

Nous pouvons faire le même travail avec la situation 2 qui, rappelons-le, est celle où nous ne sommes pas à la ligne 2. En reformulant, nous pourrions dire que cette situation est celle où nous n'avons pas que $T$ est vraie et que simultanément $U$ est fausse.

$T$ implique $U$ est équivalent à dire que nous n'avons pas que
$T$ prend la valeur vrai et que $U$ prend la valeur faux.

On obtient alors que la situation 2 est celle où

$T$ implique $U$ est équivalent à « non » ($T$ et « non » $U$) .

En notation,

| $T$ | implique | $U$ | est équivalent à | « non » | ( | $T$ | et | « non » | $U$ | ) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $\Rightarrow$ | $U$ | $\equiv$ | $\neg$ | ( | $T$ | $\wedge$ | $\neg$ | $U$ | ) |

Donc, nous avons que $T \Rightarrow U \equiv \neg(T \wedge \neg U)$, qui est exactement l'équivalence (1).

Il est donc important de se rappeler que le symbole $\Rightarrow$ représente toute l'information présentée dans une table de vérité. Même si nous voulons synthétiser le tout dans un symbole, il ne faut jamais oublier ce que $P \Rightarrow Q$ signifie. Avec cet exemple, on peut se questionner à savoir si l'utilisation du symbolisme peut bloquer la compréhension des étudiants. Or, ceci serait fâcheux, puisque le symbolisme est très utile en mathématiques et encore plus particulièrement en logique. Il serait assez pénible de devoir toujours utiliser des mots, comme fait dans l'explication précédente, pour discuter d'équivalences logiques.

Dans ce cas, comment est-il possible de faire usage du symbolisme sans nuire à la compréhension des étudiants lors de l'apprentissage des équivalences logiques ? Pour étudier cette question, nous ferons appel à la théorie de Susan Pirie et de Thomas Kieren. Nous chercherons donc à voir s'il est possible que le symbolisme puisse poser problème et, si c'est le cas, comment continuer de l'utiliser sans pour autant freiner la compréhension des étudiants.

#### 5.1.3 S'approprier l'image

Pour étudier les équivalences logiques, les connecteurs logiques et, plus particulièrement, l'implication, nous utiliserons la théorie de Susan Pirie et de Thomas Kieren [11] pour décrire nos réflexions. Cette théorie a été présentée à la section 2 de la partie théorique.

Tout d'abord, nous avons parlé précédemment de symbolisme. Remarquons que l'usage du symbolisme est présent dans un des stades du modèle de Pirie-Kieren. Dans la sous-section 2.3.5 traitant du stade de la généralisation, nous avons mentionné que, dans ce stade, il était possible de voir apparaître plus de symboles, étant donné que le symbolisme, en mathématiques, permet d'avoir plus de généralité.

Le symbole qui nous intéresse particulièrement ici est celui du conditionnel ($\Rightarrow$). Il représente l'idée de *si... alors ...*, l'idée que l'énoncé conséquent *est une conséquence de* l'antécédent. Nous pourrions dire que l'expression symbolique « $P \Rightarrow Q$ » est la généralisation (dans les termes de Pirie-Kieren) de l'idée que si l'antécédent est vrai, alors le conséquent sera également vrai. De même, les autres connecteurs ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$) représentent eux-aussi la version symbolique d'énoncés logiques (respectivement « non », « et », « ou », « si, et seulement si »). Nous pourrions donc dire que, lorsque l'étudiant apprend les symboles logiques et les utilise, il est rendu au stade de la généralisation de Pirie-Kieren.

Regardons comment ces notions sont présentées dans des ouvrages de références de cours de logique. Les deux ouvrages que nous prendrons pour référence sont le livre de Claude Levesque *Sur le sentier des mathématiques* [Levesque, 2007] et les notes de cours d'Hugo Chapdelaine et de Bernard R Hodgson pour le cours MAT-1300 [Chapdelaine et Hodgson, 2015] qui sont les deux principales références données dans le cours Éléments de mathématiques à la session d'automne 2015. Il est important de comprendre que l'objectif ici n'est pas de critiquer négativement ces deux ouvrages, mais

11. Pour alléger le texte, nous dirons seulement la théorie Pirie-Kieren.

plutôt d'essayer de voir comment certaines notions qui y sont présentées peuvent être reçues par les étudiants. Notons également que le livre de Levesque détaille beaucoup moins les notions de logique étudiées ici que les notes de cours de Chapdelaine et Hodsgon.

Commençons par le livre de Levesque. Dans ce livre, les cinq connecteurs sont présentés brièvement dans une structure qui ressemble généralement à ceci : idée principale, notation, table de vérité et remarques subséquentes (s'il y en a). Par exemple, dans le cas de la conjonction, on l'introduit dans le livre en disant que c'est « la proposition $p$ *et* $q$ que l'on écrit symboliquement $p \wedge q$. » On parle également du fait que la conjonction est « vraie si les propositions $p$ et $q$ sont vraies toutes les deux ; autrement, la conjonction $p \wedge q$ est une proposition fausse. » [Levesque, 2007, p. 2] Un point important à remarquer est qu'aucun exemple concret n'est donné avec les définitions.

Dans les notes de cours de Chapdelaine et Hodgson, la structure de présentation ressemble un peu à celle du livre de Levesque, à la différence que, suite à chaque définition, des exemples concrets ont été ajoutés. Pour la conjonction, un des deux exemples présentés avec la définition est :

> La proposition $P \wedge Q$, avec $P :=$ « La Lune est un satellite de la Terre » et $Q :=$ « La lune est faite de fromage », est fausse, puisque val$(Q) =$ F.
> [Chapdelaine et Hodgson, 2015, p. 24]

Regardons à nouveau ceci, mais à l'aide de Pirie-Kieren. Rappelons que les cinq premiers stades de la compréhension dans ce modèle sont les connaissance initiales, la création d'une image, l'appropriation de l'image, l'observation de propriétés et la généralisation.

Dans le livre de Levesque, nous pouvons voir que les notions de propositions logiques sont présentées de manière généralisée et avec la notation. Au lieu d'utiliser la notation pour représenter une idée, on la définit comme le sujet à l'étude. Ces caractéristiques sont les mêmes que celle observées dans le stade de la généralisation de Pirie-Kieren. Les étudiants doivent donc, dans ce contexte, comprendre directement la généralisation des concepts. Les quatre premiers stades sont en quelque sorte absents ici.

Dans les notes de Chapdelaine et Hodgson, le fait d'inclure des exemples plus concrets est une bonne façon de permettre aux étudiants de mieux « voir » ce que représentent ces concepts. Ce genre d'éléments pourrait donner un peu plus l'opportunité aux étudiants de faire le genre de travail et d'avoir des réflexions caractéristiques du stade de la Création d'une image de Pirie-Kieren. Notons toutefois que ces exemples arrivent <u>après</u> les définitions et la présentation des tables de vérité.
Dans les deux cas, si on compare la présentation des notions avec la théorie de Pirie-

Kieren, nous pourrions dire que les étudiants doivent immédiatement se familiariser avec des notions déjà généralisées et mises sous forme symbolique, avant même d'avoir une image claire des concepts (normalement formée dans les stades 2 à 4 du modèle). Cette image pourrait possiblement être insuffisante lorsque viendra le temps de traiter d'équivalences logiques.

Pour tenter de se représenter la progression de la compréhension des étudiants, les différents aspects discutés précédemment ont été représentés dans la Figure 5.13, inspirée de celle présentée par Pirie et Kieren à la Figure 2.1 dans cet essai. Dans cette figure, on traite spécifiquement de l'exemple de l'implication.

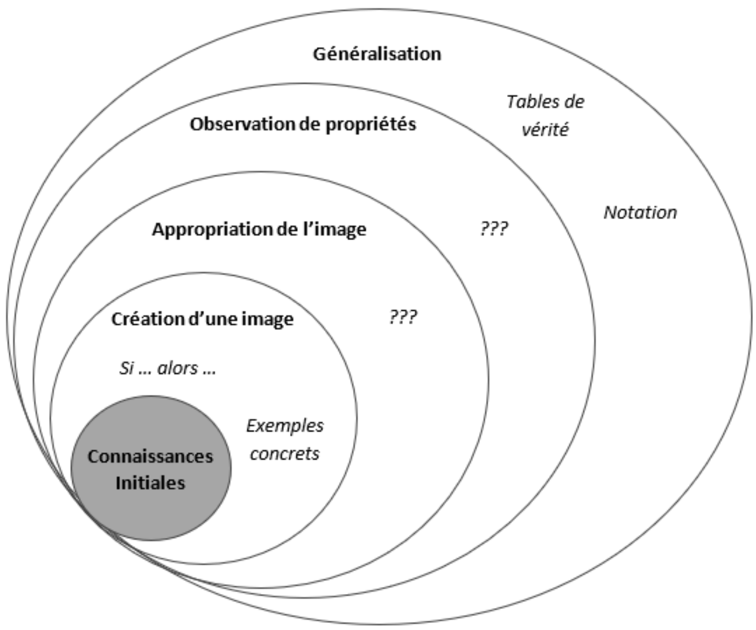


FIGURE 5.13 – Cinq premiers stades de Pirie-Kieren selon la présentation faite des notions de logique

En présentant les notions dans cet ordre aux étudiants, on constate que certains stades de la compréhension selon Pirie-Kieren sont peu présents, voir même complètement absents.

Les étudiants doivent commencer leur compréhension au stade de la généralisation. Ensuite, on leur donne l'opportunité de voir plusieurs exemples et de tenter de se créer une image mentale, mais encore une fois en leur demandant déjà d'utiliser la notation et les définitions. C'est cet aspect qui a été représenté à la Figure 5.13. Notons qu'il est possible que plusieurs étudiants comprennent très bien les notions de la manière dont les concepts sont présentés dans les deux ouvrages de référence. Nous tentons toutefois d'analyser, à l'aide de Pirie-Kieren, pourquoi certains étudiants peuvent avoir de la difficulté avec ces concepts.
En bref, les difficultés soulevées précédemment dans la sous-section 5.1.2 (exemple

détaillé) pourraient provenir d'une mauvaise intériorisation et d'une image insuffisante des connecteurs logiques. Si l'étudiant ne fait pas assez d'exemplification et ne manipule pas suffisamment les notions, il est possible qu'il ne s'approprie pas une image assez forte pour comprendre les équivalences logiques. Également, si la logique derrière les valeurs de vérité présentées dans les tables des différents connecteurs n'est pas suffisamment comprise, il est possible que lorsqu'on utilise sa forme symbolique, cela pose problème aux étudiants.

En effet, si l'image de l'implication qui est faite par l'étudiant est celle d'une table de vérité abstraite, il est possible, selon l'analyse faite avec le modèle de Pirie-Kieren, de ne pas pouvoir bien saisir l'équivalence $T \Rightarrow U \equiv \neg(T \wedge \neg U)$. Même si le fait de construire une table de vérité peut nous convaincre que cette équivalence logique est vraie, elle ne nous permet pas forcément de la comprendre et d'être capable de s'en rappeler.

Dans ce cas, comment serait-il possible de **donner aux étudiants l'opportunité de mieux comprendre** la notion d'implication ?

En logique, il n'est pas forcément évident de ne pas utiliser la notation. Toutefois, si nous ne donnons pas suffisamment l'opportunité aux étudiants de se familiariser avec les symboles et de comprendre l'idée derrière ceux-ci, il est possible de voir le genre de difficultés présentées dans l'exemple de la sous-section 5.1.2.

Dans un autre ouvrage de référence en logique, les notions sont présentées d'une manière légèrement différente. Un bon exemple d'exercice [12] qui pourraient mieux permettre au étudiants de voir les notions et de se former une image mentale en est un tiré du livre de Alan G. Hamilton [Hamilton, 1978, p. 3].

Notons que, dans le livre, cet exercice se retrouve avant la présentation de tables de vérité. À ce moment dans le livre, seule l'idée générale derrière les symboles était présentée. C'est seulement suite à cet exercice que les tables de vérité apparaissent pour la première fois dans l'ouvrage.

12. Le livre étant en anglais, l'exercice a été traduit en français dans cet essai.

> **Exercice :**
> Traduire en symboles les énoncés suivants :
> (a) Si la demande est restée constante et que les prix ont augmentés, alors le chiffre d'affaire doit avoir augmenté.
> (b) Pour que nous gagnions les élections, il est nécessaire que Jones soit élu chef du parti.
> (c) Si $x$ est un nombre rationnel et que $y$ est un nombre entier, alors $z$ n'est pas un nombre réel.
> [...]

Dans l'exercice du livre de Hamilton, il est nécessaire pour les étudiants de se questionner sur la logique derrière le symbolisme. Il n'est pas possible d'utiliser aveuglément les symboles ou de se référer aux tables de vérités, car celles-ci n'ont même pas encore été vues. Ce type d'exercice force les étudiants à trouver des exemples et à manipuler les idées de bases de la logique. Lorsque les tables de vérités sont ensuite introduites, elles prennent, selon moi, beaucoup plus de sens et, aux yeux des étudiants, ne sont pas que de simples valeurs arbitraires. La table de vérité de chacun des connecteurs vient ainsi résumer et représenter chacun des connecteurs déjà manipulés par les étudiants, au lieu de les introduire.

Pour comparer, regardons maintenant de quoi pourrait avoir l'air le schéma de compréhension selon Pirie-Kieren, mais avec la présentation de la matière telle que fait dans le livre de Hamilton. Celui-ci est représenté dans la Figure 5.14.

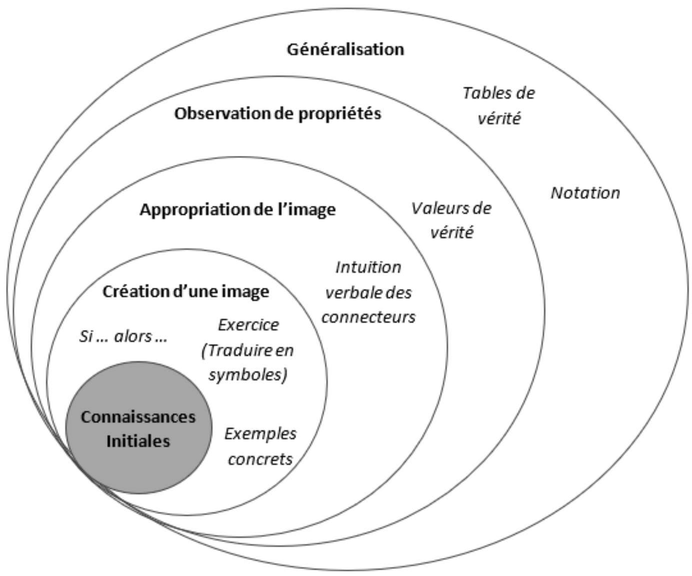


FIGURE 5.14 – Cinq premiers stades de Pirie-Kieren selon la présentation faite dans le livre d'Hamilton

En laissant les étudiants manipuler les idées, nous nous retrouvons en plein dans le stade de la Création d'une image de Pirie-Kieren. Il est donc possible pour les étudiants de donner un sens aux idées de base en logique et de s'approprier (au stade Appropriation de l'image), non pas l'image d'une table de vérité, mais plutôt l'intuition verbale de ces idées. En tentant de voir quelles sont les valeurs de vérité des différents connecteurs (i.e. en observant les propriétés des différents connecteurs), il est finalement possible de caractériser et de généraliser des idées dans des tables de vérité. Ainsi, lorsque l'étudiant doit traiter des équivalences logiques, les images construites des différents connecteurs sont possiblement beaucoup plus solides et pourraient permettre aux étudiants de mieux comprendre quoi faire, puisqu'il leur est toujours possible de revenir aux intuitions verbales se trouvant derrière les symboles représentants des connecteurs.

### 5.1.4 Résumé

S'il y a une chose à retenir de l'analyse faite précédemment, c'est que lorsque l'on introduit des notations, il faut toujours s'assurer de donner l'opportunité aux étudiants de se familiariser avec les idées derrière les symboles. En terme de Pirie-Kieren, il s'agit de l'idée que, si nous demandons aux étudiants d'avoir une compréhension du stade de la généralisation, il faut s'assurer de leur permettre de passer par les trois stades précédents. Cette réflexion ne veut pas dire que la présentation faite des notions dans les deux ouvrages de référence ([Levesque, 2007] et [Chapdelaine et Hodgson, 2015]) n'est pas adéquate. Toutefois, lorsque nous sommes témoins de difficultés de compréhension dans des aspects très théoriques et avec beaucoup de notations, il est pertinent de se questionner à savoir si les symboles ont un sens dans la tête des étudiants.

Ce genre de situation est, selon ma propre expérience, très récurrent dans des cours de mathématiques universitaires. Ils n'est pas du tout hors du commun de voir la matière dans l'ordre suivant : *définitions, exemples, théorèmes, démonstration, exemples, applications*. Ceci est un autre exemple de moments où la généralisation est la première étape que l'on demande aux étudiants de faire pour comprendre des notions en mathématiques. Présenter la matière dans un tel gabarit revient, en d'autres mots, à demander aux étudiants de constamment commencer leurs apprentissages au cinquième stade de la compréhension selon Pirie-Kieren.

## 5.2 Quantificateurs logiques

La dernière notion dont nous discuterons dans cet essai est la notion de quantificateurs logiques. En Éléments de mathématiques, les quantificateurs sont généralement abordés peu de temps après les connecteurs, vus dans la section précédente. La quantification représente un autre exemple important de l'usage du symbolisme en logique et s'applique donc aussi bien à l'analyse faite dans la sous-section sur les connecteurs. L'objectif dans les prochains paragraphes sera donc d'étudier un autre exemple de l'utilisation du symbolisme et la manière dont ces notions sont perçues par les étudiants. Nous ne referons pas l'analyse détaillée, puisque les éléments importants ont déjà été abordés dans la sous-section 5.1.3. Nous tenterons plutôt de voir, dans un contexte similaire, comment les aspects discutés à l'aide de la théorie de Pirie-Kieren s'articulent.

### 5.2.1 Notions préalables

En logique, pour une proposition donnée, on s'intéresse parfois savoir si, pour un ensemble d'éléments donné (qu'on nommera univers du discours), la proposition est vraie pour au moins un élément de l'ensemble et si celle-ci est vraie pour tous les éléments de l'ensemble. C'est cette idée que représente la Définition 5.

**Définition 5**

Étant donné l'univers du discours $X$, soit la forme propositionnelle $P(x)$, avec $x \in X$.
La **quantification universelle** de $P(x)$ est la proposition qui est vraie si, et seulement si, la proposition $P(x)$ est vraie pour toutes les valeurs de $x$ dans $X$. Cette quantification universelle est notée $(\forall x \in X)P(x)$.
La **quantification existentielle** de $P(x)$ est la proposition qui est vraie si, et seulement si, la proposition $P(x)$ est vraie pour au moins une valeur de $x$ dans $X$. Cette quantification existentielle est notée $(\exists x \in X)P(x)$.

[Chapdelaine et Hodgson, 2015, p. 48]

Les quantificateurs universels et existentiels sont abondamment utilisés en mathématiques. Généralement, les étudiants semblent bien comprendre ces notions. Toutefois, il est arrivé à quelques reprises que certains étudiants au CDA aient de la difficulté avec la combinaison de ces deux quantificateurs, la quantification de plusieurs propositions, ainsi que l'importance de l'ordre d'apparition des quantificateurs.

### 5.2.2 Exemples détaillés

L'exemple suivant est tiré des séries d'exercices du cours Éléments de Mathématiques, tel que donné à la session d'automne 2019.

> **Exercice :**
> Étant sous-entendu que $x, y \in \mathbb{N}$, dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.
>
> a) $\forall x, \exists y, x < y^2$.
>
> b) $\exists y, \forall x, x < y^2$.
>
> c) $\exists y, \forall x, xy = x$
>
> d) $\forall x, \exists y, xy = x$
>
> [...]
>
> **Solution :**
>
> a) Vraie. Pour $x$ fixé, il suffit de choisir par exemple $y = x+1$. On a alors $y^2 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 > 2x > x$.
>
> b) Fausse. Quelque soit $y$, le choix $x = y^2 + 1 > y^2$ montre que $\forall x, x < y^2$ est fausse.
>
> c) Vraie. Il suffit de choisir $y = 1$.
>
> d) Vraie. Pour chaque $x$, il suffit de toujours choisir $y = 1$.
>
> [...]

Regardons d'abord les sous-questions a) et b). Ces deux énoncés dont identiques, à l'exception que les deux quantificateurs ont été inversés. Lors les mes séances de dépannage dans le cours MAT-1300, plusieurs étudiants m'ont demandé d'expliquer les distinctions entre ces énoncés. Tout comme nous l'avons fait pour les connecteurs dans la dernière section, essayons de voir comment verbaliser en français la partie a) et la partie b).

Pour l'énoncé a),

| $\forall x$ | $\exists y$ | | $x < y^2$. |
|---|---|---|---|
| Pour tout $x$, | il existe un $y$ | tel que | $x$ est plus petit que $y^2$. |
| Pour toute valeur de $x$, | je suis capable de trouver $y$ | tel que | $x$ sera plus petit que $y^2$. |
| Peu importe la valeur de $x$, | je peux te donner un $y$ | tel que | $x$ sera plus petit que $y^2$. |

Pour l'énoncé b),

| $\exists y$ | | $\forall x$ | $x < y^2$. |
|---|---|---|---|
| Il existe un $y$ | tel que | pour tout $x$ | $x$ est plus petit que $y^2$. |
| Je peux trouver un $y$ | tel que | pour toute valeur de $x$ | $x$ est plus petit que $y^2$. |
| Je suis capable de choisir $y$ | tel que | peu importe $x$ | $x$ sera plus petit que $y^2$. |

En exprimant les deux énoncés dans une langue bien connue des étudiants (le français), il est beaucoup plus facile de voir l'importance de l'ordre des deux connecteurs dans un énoncé logique. Tout comme mentionné dans la sous-section 5.1.3, si l'étudiant n'a pas suffisamment l'opportunité de manipuler les symboles avant de les utiliser, il n'aura pas une image assez solide de ceux-ci et aura de la difficulté à les utiliser.

Les sous-questions a) et b) ne sont pas très difficiles à comprendre, si les symboles des quantificateurs sont bien compris. Encore une fois, il nous est donc possible de voir combien il est important, lors de l'introduction de symboles, de s'assurer que l'image qu'ont les étudiants est suffisamment élaborée et forte.

Pour les sous-questions c) et d), la formulation en français ne sera pas faite. Je vous invite à essayer de dire « en mots » les énoncés suivants et ce de plusieurs manières différentes. L'idée en faisant ce genre d'exercices est, bien évidemment, de solidifier notre propre compréhension, mais aussi en reformulant de plusieurs façons différentes, de donner la chance aux étudiants d'entendre une formulation qui sera significative et qui renforcera leur propre image mentale.

| $\exists y$ | | $\forall x$ | $xy = x.$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |

| $\forall x$ | $\exists y$ | | $xy = x.$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |

L'exemple présenté précédemment est un bon exemple d'exercice dans lequel les étudiants doivent manipuler et exemplifier pour comprendre les notions de quantificateurs et l'importance de l'ordre de ceux-ci dans un énoncé. Toutefois, en terme du modèle de Pirie-Kieren, si l'étudiant ne s'est pas déjà approprié une image assez forte de l'idée derrière le symbolisme, cet exercice pourrait être très difficile et donner possiblement un sentiment d'incompréhension aux étudiants.

Pour renforcer l'image chez les étudiants, il faut revenir au stade de la création d'une image. En demandant aux étudiants d'écrire en mots les énoncés et ensuite de trouver leurs valeurs de vérité, cet exercice se situerais davantage dans le genre de manipulations faites dans le stade de la création de l'image et pourrait possiblement aider la compréhension des symboles de quantification.

Voici un dernier exemple d'exercice favorisant la compréhension des quantificateurs. Il est tiré des séries d'exercices du cours Éléments de mathématiques, tel que donné à la session d'automne 2015. Ce type d'exercice représente bien le genre de manipulations pouvant être faites lorsque la compréhension de l'étudiant est au stade de la Création de l'image.

> **Exercice :**
> Donner deux propositions paramétrées $P(x)$ et $Q(x)$ pour lesquelles les deux prositions suivantes ont des valeurs de vérité distinctes :
>
> (a) $(\exists x \in \mathbb{R})(P(x) \wedge Q(x))$.
>
> (b) $(\exists x \in \mathbb{R})P(x) \wedge (\exists x\mathbb{R})Q(x)$.
>
> **Solution :**
> On peut prendre par exemple $P(x) := x > 0$ et $Q(x) := x < 0$. On a alors que la proposition $(\exists x \in \mathbb{R})(P(x) \wedge Q(x))$ est fausse, et que $(\exists x \in \mathbb{R})P(x) \wedge (\exists x \in \mathbb{R})Q(x)$ est vraie.

Au lieu de seulement traiter de propositions abstraites, il est ici demandé aux étudiants d'expliciter deux exemples de propositions, dans deux cas où le quantificateur existentiel n'est pas utilisé de la même manière.

Toujours en terme de Pirie-Kieren, cet exercice représente très bien le genre de manipulations caractéristiques du stade de la Création de l'image. Les étudiants doivent trouver des exemples concrets et significatifs leur permettant de mieux « voir » comment le quantificateur $\exists$ s'utilise.

#### 5.2.3 Retour sur la continuité

À la sous-section 4.2, nous avons abordé la définition formelle de la continuité et nous avons pu voir qu'une partie de la compréhension de celle-ci résidait dans la compréhension des quantificateurs. Revenons sur cette définition.

⋆ Rappel :
La fonction $f$ est **continue en** $a$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

En mots, on pourrait dire que la fonction $f$ est continue en a si peu importe la valeur strictement positive de $\varepsilon$, je peux trouver une valeur strictement positive de $\delta$ telle que $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Il est possible de constater que l'idée décrite dans la sous-section 4.2 apparaît très clairement lorsque les quantificateurs sont exprimés en mots. En effet, nous avions parlé du fait que les quantificateurs dans la définition caractérisaient le fait que *peu importe* la variation observée de la fonction, nous pouvions trouver un intervalle autour de $x_0$ de tel sorte que l'image de $f$ ne dépassait pas cette variation. Ceci revient à dire que pour toute variation d'au plus $\varepsilon$ de l'image de $f$, il y aura une variation d'au plus $\delta$ de part et d'autre de $x_0$ de telle sorte que l'image de $f$ ne variera pas plus que de $\varepsilon$.

Encore une fois, dans cet exemple, il est possible de constater la pertinence de la verbalisation des symboles des quantificateurs logiques.

# 6 Conclusion

Même s'il aurait été possible de continuer encore longtemps, nous terminerons ici notre analyse. J'espère que la lecture de ces quelques pages ont pu amener des questionnements et des réflexions aussi enrichissantes que lorsque je les ai écrites.

Beaucoup d'autres sujets riches auraient très bien pu être abordés dans le cadre de cet essai. Notamment, en algèbre linéaire, certains sujets tels que les changements de bases, les transformations linéaires, les ensembles solutions, les valeurs et vecteurs propres auraient très bien pu se retrouver au cœur de cet essai. Également, les structures abstraites dans les cours d'algèbre seraient des notions propices aux mêmes genre d'analyses que celles faites dans cet essai.

De même, d'autres outils didactiques et théories de l'apprentissage auraient pu être utilisés pour amener un point de vue différent ou expliquer différemment certaines notions abordées dans ce travail. Les deux théories choisies sont celles qui, selon moi, permettaient le mieux de discuter et de représenter la compréhension des mathématiques avancées. L'important est surtout de nous donner des outils pertinents nous permettant de juger de la compréhension de nos étudiants, même dans des cours plus avancés de mathématiques.

Même s'il a pu sembler parfois dans ce travail que l'enseignement et la structure des cours de mathématiques à l'université étaient critiqués, la conclusion de cet essai n'est pas de revoir au complet la façon dont les mathématiques avancées sont enseignées. L'idée est surtout de nous questionner, lorsque nous observons des difficultés chez les étudiants, afin de voir d'où elles proviennent. Aussi, il faut se questionner à savoir si les étudiants ont l'**opportunité** de bien comprendre ce qui leur est enseigné, que ce soit par des exemples, par la façon dont les sujets sont présentés dans les notes, par la façon dont ils sont verbalisés en classe et surtout par des exercices offrant la chance d'approfondir leur compréhension.

Parfois, les théories peuvent être utiles pour expliquer des phénomènes observés chez les étudiants, de manière à pouvoir comprendre, mais aussi à pouvoir agir pour favoriser la compréhension des mathématiques de niveau universitaire.

## Références

[Arnon et al., 2014] ARNON, I., COTTRILL, J., DUBINSKY, E., OKTAC, A., TRIGUEROS, S. R. F. M. et WELLER, K. (2014). APOS Theory : A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. Springer, New York, États-Unis.

[Bass, 2011] BASS, H. (2011). A Vignette of Doing Mathematics : A Meta-cognitive Tour of the Production of Some Elementary Mathematics. The Montana Mathematics Enthusiast, Vol. 8(12):3–34.

[Cappetta et Zollman, 2013] CAPPETTA, R. et ZOLLMAN, A. (2013). Agents of Change in Promoting Reflective Abstraction : A Quasi-Experimental Study on Limits in College Calculus. REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education, Vol. 2(3):343–357.

[Cassidy et Lavertu, 1994] CASSIDY, C. et LAVERTU, M.-L. (1994). Introduction à l'analyses. Les Presses de l'Université Laval, Québec.

[Chapdelaine et Hodgson, 2015] CHAPDELAINE, H. et HODGSON, B. R. (2015). Éléments de mathématiques - Notes pour le cours MAT-1300 4$^e$ édition. Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Québec.

[Dubinsky, 1991] DUBINSKY, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, chapitre 7, pages 95–123. Kluwer Academic Publishers, Pays-Bas, Mathematics Education Library édition.

[Dubinsky et McDonald, 2002] DUBINSKY, E. et MCDONALD, M. A. (2002). APOS : A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In The Teaching and Learning of Mathematics at University Level : An ICMI Study, pages 275–282.

[Hamilton, 1978] HAMILTON, A. G. (1978). Logic for Mathematicians. Cambridge University Press, Cambridge.

[Levesque, 2007] LEVESQUE, C. (2007). Sur le sentier des mathématiques. Loze-Dion éditeur inc, Québec.

[Ma, 1999] MA, L. (1999). Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Mahwah, New Jersey.

[PDA, 2016] PDA (2016). Progression des apprentissages au secondaire - Mathématique. Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur, Québec. (`http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/siteweb/documents/education/jeunes/pfeq/PDA_PFEQ_francais-langue-enseignement-primaire_2011.pdf`).

[Piaget, 1974] PIAGET, J. (1974). Adaptation vitale et psychologie de l'intelligence : Sélection organique et phénocopie. Hermann, Paris.

[Piaget et al., 1977] PIAGET, J., BERTHOUD-PAPANDROPOULOU, I., BILLETER, J.-B., BOURQUIN, J.-F., KAUFMANN, J.-L., M{OESSINGER, P., MONTANGERO, J., MOREAU, A., MUNARI, A., SZEMINSKA, A. et VŒLIN-LIAMBEY, D. (1977). Recherches sur l'abstraction réfléchissante : 1 / L'abstraction des relations logico-arithmétiques. Presses universitaires de France, Paris.

[Pirie et Kieren, 1994] PIRIE, S. et KIEREN, T. (1994). Growth in Mathematical Understanding : How Can We Characterise It and How Can We Represent It ? Educational Studies in Mathematics (Learning Mathematics : Constructivist and Interactionist Theories of Mathematical Development), Vol. 26(2/3):165–190. (`https://www.jstor.org/stable/3482783`).

[Skemp, 2012] SKEMP, R. R. (2012). The psychology of learning mathematics : Expanded American edition. Routledge.

[Trigueros et Oktaç, 2005] TRIGUEROS, M. et OKTAÇ, A. (2005). La théorie APOS et l'enseignement de l'algèbre linéaire. Annales de didactique et de sciences cognitives, Vol. 10:157–176.