

Représentation transformationnelle de la fonction et de sa dérivée

Document présenté à
Frédéric Gourdeau
Bernard R. Hodgson
Claudia Corriveau

Dans le cadre du cours :
MAT-6500 (Essai)

Document réalisé par :

Samuel Gagnon
111 095 992



UNIVERSITÉ
LAVAL

30 avril 2019

Table des matières

1	Introduction	4
2	Éléments théoriques	5
2.1	La fonction	5
2.1.1	Définitions	5
2.1.2	Conceptions de la fonction	6
2.2	Représentations de la fonction	8
2.2.1	Symboles	8
2.2.2	Diagramme sagittal	9
2.2.3	Tableau	10
2.2.4	Plan cartésien	10
2.3	Une conception robuste des fonctions à valeurs réelles	12
2.4	La dérivée	12
2.4.1	Définitions	12
2.5	Représentation de la dérivée dans le plan	14
2.5.1	Survol de quelques représentations	14
2.5.2	La pente d'une limite de droites sécantes	14
2.5.3	La dérivée : la limite des pentes d'une suite de droites sécantes	14
2.5.4	Commentaires sur l'analyse de la représentation de la dérivée dans le plan	16
2.5.5	Le dynamisme dans la représentation de la dérivée	16
2.5.6	La représentation de la non-dérivabilité d'une fonction	17
2.5.7	Interprétation et conception de la dérivée selon sa représentation	17
3	Motivation	18
4	Le diagramme de liaisons	19
4.1	Description	19
4.2	Implémentation	22
4.3	Interprétation de la dérivée	22
4.3.1	Description générale	22
4.3.2	Description plus rigoureuse	23
4.3.3	Commentaires	23
4.3.4	Exemples	23
4.4	La composition de fonctions	29
4.4.1	Représentation de la composition	29
4.4.2	La dérivée d'une composition de fonctions	31
4.5	Les points fixes	32
4.6	Exemple d'interprétation d'un diagramme de liaisons	33
5	Discussion	35
5.1	Représentations de la fonction et conceptions	35
5.2	Conception de la dérivée	36
5.3	La composition de fonctions	37
5.3.1	La représentation de la composition de fonctions	37
5.3.2	La dérivée d'une composition de fonctions dans les manuels du cégep	38

5.3.3	La dérivée d'une composition de fonctions dans le diagramme de liaisons .	39
5.4	Les points fixes	40
5.5	Les fonctions à plusieurs variables	41
5.5.1	Les conceptions et les représentations	41
5.5.2	La dérivée d'une fonction à plusieurs variables	43
6	Conclusion	46
7	Annexes	47
7.1	L'application RTF	47
7.1.1	Description	47
7.1.2	Environnement de développement	47
7.1.3	Le domaine et le codomaine	48
7.1.4	Le grillage	49
7.1.5	Le point d'évaluation	49
7.1.6	L'échantillon	49
7.1.7	La fonction	51
7.1.8	La transformation	51
7.1.9	Le domaine et le raffinement de l'échantillon	53
7.1.10	La composition	53
7.2	Les autres applications	55
7.2.1	La composition de deux fonctions	55
7.2.2	Les fonctions de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2	56
7.2.3	Les fonctions de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^3	56
8	Références	58

1 Introduction

Ayant complété mon diplôme d'études secondaires en 2011 et mon diplôme d'études collégiales en 2014, j'ai eu la chance d'apprendre les mathématiques au travers des outils informatiques puissants et accessibles. En 2011, au secondaire, j'utilisais le logiciel Quick Graph [20] pour m'amuser à dessiner des courbes dans le plan et des surfaces dans l'espace. En 2011, au cégep, j'utilisais le site internet Wolfram Alpha [37] pour apprendre à étudier les fonctions. En 2013, j'apprenais à utiliser Maple [23] dans l'étude de fonctions à plusieurs variables. Durant mon baccalauréat en mathématiques (2014 à 2017), j'ai utilisé Desmos [21], Geogebra [18], MATLAB [24] et bien d'autres logiciels pour m'aider dans mes démarches mathématiques. L'ordinateur a donc été un élément clef dans mon apprentissage. Les logiciels mentionnés m'ont permis d'explorer, par moi-même, plusieurs concepts mathématiques, dont la fonction et ses dérivées.

Le concept de fonction est une idée très importante en mathématiques. Celui-ci est abordé dans plusieurs cours postsecondaires. Il s'agit aussi d'une notion élémentaire fort utile dans plusieurs domaines reliés aux sciences. Ce sont d'ailleurs des raisons pour lesquelles on amorce explicitement l'apprentissage de ce concept dans le deuxième cycle du secondaire (p.9 et p.59 du programme d'études en mathématiques du 2e du secondaire [6]). Cette notion se développe et se complexifie au fur et à mesure que les étudiants avancent dans leur parcours scolaire (voir la progression des apprentissages au secondaire [5]). En particulier, deux des trois cours obligatoires en mathématiques dans le programme *Sciences de la nature* au cégep portent sur l'analyse de fonctions : calcul différentiel et calcul intégral. Entre autres, à ce niveau, on introduit la dérivée. À l'université, dans les programmes de sciences et génie, la fonction et ses dérivées sont étudiées dans différents cours : calcul de fonctions à plusieurs variables, mathématiques de l'ingénieur I et II, analyse numérique pour l'ingénieur, optimisation, analyse III, analyse complexe, équations différentielles, probabilités, statistique mathématique, etc. Puisqu'autant d'importance est accordée à ces notions, il devient naturel de se questionner sur leurs représentations. Plusieurs logiciels, dont ceux que j'ai utilisés dans mon cheminement, permettent de représenter des fonctions dans le plan cartésien. Cette représentation introduite par Descartes en 1637 dans le texte *La Géométrie* [8] est encore bien utilisée en mathématiques aujourd'hui. On pourrait toutefois se demander si les technologies modernes pourraient nous permettre d'utiliser efficacement d'autres représentations de la fonction.

L'utilisation de plusieurs représentations pourrait aider à obtenir de *meilleures* connaissances mathématiques. C'est-à-dire, cela pourrait permettre d'atteindre une compréhension profonde des mathématiques selon la définition offerte par Liping Ma. Dans le livre *Knowing and Teaching Elementary Mathematics* ([22] p.122), on décrit certaines propriétés de la *connaissance profonde des mathématiques fondamentales* (PUFM ou *Profound Understanding of Fundamental Mathematics*) et les avantages que cela peut apporter au niveau de leur enseignement. En particulier, une des propriétés de la PUFM concerne les perspectives multiples. On indique que ceux ayant une PUFM « apprécient les différentes facettes d'une idée et les multiples approches à une solution, ainsi que leurs avantages et leurs désavantages ». En plus, ils peuvent « fournir des explications mathématiques à ces différentes approches et façons de faire ». Cette propriété de la PUFM peut permettre à un enseignant d'amener les étudiants à « une compréhension flexible de la discipline ». Bien que cet ouvrage s'intéresse d'abord aux mathématiques du niveau primaire, on pourrait certainement imaginer qu'avoir des perspectives multiples en mathématiques puisse

apporter des avantages similaires même dans des niveaux plus avancés. Ainsi, l'utilisation et la maîtrise d'une variété de représentations pour un même objet mathématique pourraient potentiellement aider à atteindre une connaissance plus *profonde* (dans le sens de la PUFM décrite par Liping Ma) du concept. Pour les étudiants, cette flexibilité dans les représentations peut leur permettre de jongler avec différentes solutions pour un même problème, ou encore d'être en mesure de faire les liens entre différents sujets.

À la lumière de l'intérêt didactique qu'on peut avoir envers les diverses représentations et de l'importance qu'on accorde au concept de fonction et de dérivée, nous nous pencherons sur les différentes représentations de ces concepts. En particulier, nous aborderons une représentation de la fonction introduite par Grant Sanderson dans la vidéo *What they won't teach you in calculus* [32]. Nous explorerons cette *nouvelle* façon de voir la fonction que nous appellerons *diagramme de liaisons* et nous nous attarderons aux différents concepts que cela permet d'atteindre.

2 Éléments théoriques

2.1 La fonction

2.1.1 Définitions

Dans plusieurs domaines scientifiques, la fonction peut être utilisée pour modéliser des phénomènes. En informatique, on peut évaluer ou approximer des fonctions pour résoudre des problèmes mathématiques et scientifiques. Dans tous les cas, ces utilisations et ces représentations reposent sur un même objet mathématique. Voici la définition usuelle de la fonction selon la théorie des ensembles (définition tirée de Hugo Chapdelaine et Bernard R. Hodgson, *Éléments de mathématiques* (7e édition) [3]) :

Définition 1. (Fonction)

Étant donné des ensembles A et B , considérons une relation (binaire) $\mathcal{F} = (A, B, F)$ de A vers B déterminée par la donnée d'un sous-ensemble $F \subseteq A \times B$ du produit cartésien de A et de B . On dira que la relation \mathcal{F} est une fonction de A vers B si elle satisfait à la condition suivante : pour tout $a \in A$, il existe un unique $b \in B$ tel que $a\mathcal{F}b$. L'ensemble F est désigné comme étant le graphe de la fonction \mathcal{F} . On dira de A qu'il est le domaine de la fonction \mathcal{F} , et de B qu'il en est le codomaine. Lorsque deux éléments $a \in A$ et $b \in B$ sont tels que $a\mathcal{F}b$ (c'est-à-dire $(a, b) \in F$), on utilisera habituellement la notation « fonctionnelle » $\mathcal{F}(a) = b$ pour représenter cette situation. On dira alors de b qu'il est l'image de a par la fonction \mathcal{F} , ou encore qu'il est la valeur de \mathcal{F} pour l'argument a . À l'inverse, on dit de a qu'il est une préimage de b par \mathcal{F} .

Comme on peut le constater, dans le contexte de la théorie des ensembles, la notion de fonction va de pair avec l'idée de relation. Voici la définition d'une relation (tirée du même ouvrage [3]) :

Définition 2. (Relation binaire)

Soit A et B des ensembles. Une relation binaire de A vers B est un triplet $\mathcal{R} = (A, B, R)$ où $R \subseteq A \times B$.

On peut observer que la fonction n'est qu'un type particulier de relation. La fonction est ainsi un triplet d'ensembles (A, B, F) qui respecte la propriété bien particulière que pour chaque élément de A , il existe un unique élément de B avec lequel il forme une paire de l'ensemble $F \subseteq A \times B$.

Notons que cette définition de la fonction n'est pas couramment utilisée en mathématiques appliquées ou dans les domaines appliqués reliés aux sciences. Entre autres, la notion de fonction en tant que triplet d'ensembles est rarement évoquée. Dans ce contexte, pour définir le concept de fonction, on opte plutôt pour une définition moins formelle. Voici une définition qui s'approche davantage de son utilisation dans les domaines scientifiques appliqués [3].

Définition 3. (Fonction)

Soit A et B , deux ensembles. On appelle fonction f de A vers B une règle d'association qui, à tout élément de A , fait correspondre exactement un élément dans B . Lorsque, à un $a \in A$ donné, la fonction f associe l'élément $b \in B$, on écrit $f(a) = b$. On dit de b qu'il est l'image de a par la fonction f , et de a , qu'il est une préimage de b par f . On dira aussi de $b = f(a)$ — qu'il est la valeur de f pour l'argument a . Le sous-ensemble de $A \times B$ comprenant tous les couples de la forme $(a, f(a))$ s'appelle le graphe de la fonction f . On dira de A qu'il est le domaine de la fonction f , et de B qu'il en est le codomaine.

Cette définition concorde mieux avec ce qui est enseigné dans les cours de mathématiques au secondaire et au cégep. Il s'agit aussi d'une définition suffisante pour l'utilisation qu'on en fait dans les mathématiques et les sciences appliquées.

2.1.2 Conceptions de la fonction

D'un point de vue conceptuel, la fonction regroupe plusieurs aspects. Selon l'article *Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function* de Marilyn Carlson et Michael Oehrtman publié par la Mathematical Association of America [2], une conception robuste de la fonction « inclut une vue de la fonction comme une entité qui accepte une donnée entrante (*input*) et produit une donnée sortante (*output*) et qui, aussi, permet de raisonner à propos de contenus mathématiques dynamiques et de contextes scientifiques. » On pourrait séparer cette conception robuste de la fonction en trois parties interconnectées.

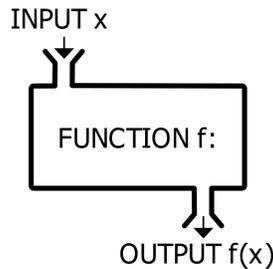


FIGURE 1 – La fonction f (*function*) prend une entrée x (*input*) et retourne une sortie $f(x)$ (*output*).
Image créée par l'utilisateur Wobailey de Wikipédia le 3 mai 2009.

D'abord, la fonction peut être vue comme une entité qui accepte une donnée entrante et produit une donnée sortante. Dans ce contexte, la fonction possède la propriété de produire, construire ou créer quelque chose selon ce qu'on lui fournit ou ce qu'on lui donne. Une image qu'on peut associer à cette conception est celle d'une boîte avec une entrée (*input*) et une sortie (*output*) telle qu'illustrée à la figure 1 de la page 6.

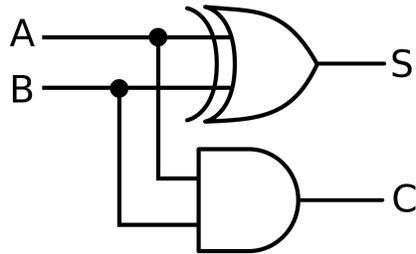


FIGURE 2 – Représentation de la fonction logique *demi-additionneur* selon la norme ANSI 91-1984. Cette fonction prend en entrée un couple de valeurs booléennes (A, B) et retourne leur somme sous la forme du nombre binaire à deux chiffres CS . La composante du haut représente un « ou exclusif » et la composante du bas représente un « et ». *Image créée par l'utilisateur Cburnett de Wikipédia le 19 décembre 2006.*

Il s'agit d'une conception qu'on pourrait qualifier d'abstraite. Pourtant, celle-ci s'applique directement en électronique numérique et en informatique. La figure 2 représente une fonction logique (nommée demi-additionneur) ayant comme entrée et sortie les couples de valeurs booléennes (A, B) et (C, S) . Bien qu'il s'agisse de la représentation d'une fonction au point de vue conceptuel, il s'agit aussi d'une structure de connexions et de composantes électroniques qui permettrait de calculer concrètement la somme de deux nombres binaires de 1 bit. Ainsi, la conception de la fonction qu'on pourrait appeler *entrée/sortie* peut être appliquée concrètement. Avec cette vision, on pourrait aussi évoquer l'idée d'exécution de la fonction. *Exécuter* signifie ici qu'on évalue la fonction avec une valeur particulière. Par exemple, exécuter le système de la figure 2 avec $A = 1$ et $B = 1$ retourne la réponse $C = 1$ et $S = 0$.

Cet aspect d'une conception robuste de la fonction s'approche de la fonction vue comme un processus tel que décrit par Dubinsky et Harel (1992) [11]. « Une conception de la fonction vue comme un processus implique une transformation dynamique de quantités selon un moyen répétable qui, selon une même quantité originale, produit toujours la même quantité transformée. Le sujet peut penser à la transformation comme une activité complète qui débute avec des objets d'une certaine nature, qui fait quelque chose à ces objets et qui obtient de nouveaux objets en guise de résultat par rapport à ce qui a été fait. »

De plus, la fonction peut être interprétée comme une relation unidirectionnelle et constante entre l'argument et son image. Ceci explique partiellement le rôle de la fonction dans les contenus mathématiques **dynamiques**. L'aspect relationnel s'explique par le fait que $f(x)$ dépend de la valeur x . Autrement dit, la valeur $f(x)$ s'adapte toujours selon la valeur de x . Ainsi, on pourrait s'imaginer que la variation dynamique de x engendre une adaptation dynamique de la valeur $f(x)$. Par contre, $f(x)$ est toujours le résultat de la variation de x et jamais l'inverse, d'où l'aspect unidirectionnel de la relation. D'ailleurs, pour mettre l'accent sur cet aspect, au deuxième

cycle du secondaire, on utilise les termes *variable indépendante* pour x et *variable dépendante* pour $f(x)$ (voir la progression des apprentissages telle que décrite par le ministère de l'Éducation [5]). La constance peut s'interpréter dans le dynamisme. Si on imagine un changement dynamique de x , cela implique une évolution de la valeur de x dans le temps. La constance nous indique que $f(x)$ ne change pas par rapport au temps. Cette quantité dépend uniquement de x .

Voici un exemple d'application de la fonction dans le cadre d'un raisonnement à propos d'un contenu mathématique dynamique. Supposons qu'on s'intéresse à la relation entre le rayon d'un cercle et son aire. La fonction $A(r) = \pi r^2$ définit l'aire du cercle selon le rayon r . Ici, la variation de r engendre une variation de $A(r)$. Augmenter (dynamiquement) la valeur de r engendre une augmentation la valeur de $A(r)$. On pourrait donc utiliser cette propriété dynamique de $A(r)$ selon la variation de r pour croire ou déduire que A est une fonction croissante.

Finalement, l'utilisation de la fonction comme outil de modélisation mathématique pourrait être un exemple de raisonnement à propos de contextes scientifiques. Ainsi, on pourrait utiliser une fonction pour modéliser la distance parcourue $f(x)$ par un objet en chute libre selon le temps x . Grâce à cela, on pourrait prévoir le temps de chute d'un objet selon certains paramètres donnés.

2.2 Représentations de la fonction

2.2.1 Symboles

L'utilisation de symboles peut permettre, dans certains cas, de caractériser précisément une fonction. Cette représentation est particulièrement efficace pour définir et reconnaître les fonctions sans ambiguïté. Il s'agit aussi d'une représentation conventionnellement utilisé dans les démarches mathématiques plus «formelles».

Naturellement, on pourrait utiliser la définition de la fonction telle qu'on la retrouve dans la théorie des ensembles (définition 1) pour représenter une fonction particulière. Il suffit alors d'écrire explicitement la définition de chacun des ensembles faisant partie du triplet (A, B, F) où A correspond au *domaine*, B au *codomaine* et F au *graphe*. Par exemple, on pourrait définir la fonction *racine carrée* $f = (A, B, F)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} A &:= [0, \infty) , \\ B &:= \mathbb{R} \text{ et} \\ F &:= \{(a, b) \in A \times B \mid a = b^2 \text{ et } b \geq 0\} . \end{aligned}$$

Parfois, il n'est pas nécessaire de faire appel directement aux notions ensemblistes pour définir la fonction. On peut donc faire appel à la définition 3 de la fonction pour la représenter symboliquement. Ainsi, pour décrire une fonction f ayant comme domaine A et comme codomaine B , on écrit

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Par exemple, on pourrait représenter la fonction qui double la valeur d'un nombre réel (et qui possède les réels comme codomaine) de la façon suivante :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x.$$

Ici, il est sous-entendu que $f(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dans un contexte où le domaine et le codomaine de la fonction sont implicitement définis, on peut représenter la fonction par une simple égalité. Par exemple, s'il est clair que le domaine et le codomaine sont les nombres réels, on pourrait définir f en écrivant « $f(x) := 2x$ »¹.

2.2.2 Diagramme sagittal

Le diagramme sagittal permet de représenter une fonction visuellement. On trace un ovale à gauche pour représenter le domaine et un ovale à droite pour représenter le codomaine. On représente les éléments de chaque ensemble par des points et les associations par des flèches. Par exemple, la figure 3 présente le diagramme sagittal de la fonction $f: A \rightarrow B$ (où $A = B = \{1, 2, 3\}$) qui associe 1 à 1, 2 à 1 et 3 à 3.

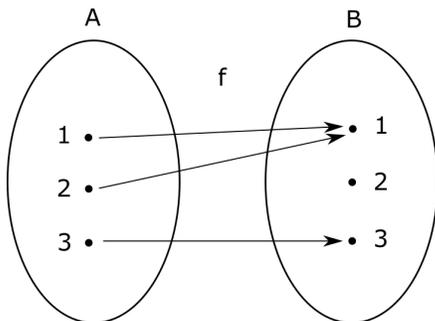


FIGURE 3 – Exemple d'un diagramme sagittal.

Cet exemple de diagramme sagittal permet de représenter entièrement la fonction. Autrement dit, l'information offerte par cette représentation est suffisante pour déduire la représentation symbolique. On peut aussi utiliser une représentation semblable pour montrer seulement certaines propriétés. Par exemple, lorsqu'on s'intéresse aux propriétés d'une fonction utilisant des ensembles munis d'une certaine topologie comme domaine et codomaine, on peut parfois représenter ces propriétés à l'aide d'un diagramme similaire. La figure 4

de la page 10 représente la propriété de continuité en un certain point d'une fonction. Les formes irrégulières servant à représenter les ensembles X et Y permettent de faire ressortir le fait qu'il s'agit d'ensembles quelconques. Le positionnement des objets dans la représentation permet de déduire que certains objets sont inclus dans (ou éléments de) certains ensembles. Ici, on indique que pour tout ensemble ouvert V contenu dans Y tel que $f(x) \in V$, il existe un ensemble ouvert U contenu dans X tel que $x \in U$ et tel que $f(U) \subset V$ contient l'élément $f(x)$.

1. Dans le présent document, on utilise le symbole « := » pour l'affectation (définition) et le symbole « = » pour la comparaison (proposition). Toutefois, certains auteurs (notamment en enseignement secondaire) utilisent le symbole « = » dans les deux contextes.

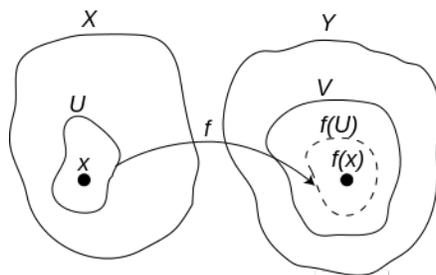


FIGURE 4 – Illustration de la continuité de la fonction $f: X \rightarrow Y$ en un point $x \in X$. Pour chaque voisinage V de $f(x)$, il existe un voisinage U de x tel que $f(U) \subseteq V$.

2.2.3 Tableau

On peut représenter la fonction à l'aide d'un tableau de valeurs. Dans une colonne (ou ligne) particulière, on note les éléments du domaine entièrement ou en partie. Dans une seconde colonne (ou ligne), on note l'image de chacun de ces éléments. Le tableau 1 représente certains éléments de la fonction sinus ainsi que leur image respective.

La représentation d'une fonction sous forme de tableau permet principalement de montrer des couples importants du graphe de la fonction. Habituellement, le tableau ne suffit pas pour représenter le codomaine d'une fonction. Ceci n'est possible que dans le cas particulier où la fonction est surjective et que tous les éléments du domaine avec leur image sont représentés. Généralement, la colonne des images ne représente que l'image des éléments choisis du domaine.

x	$\sin(x)$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1

Tableau 1 – Représentation dans un tableau de $\sin(x)$ pour certaines valeurs clefs de x .

2.2.4 Plan cartésien

Le plan cartésien est un des outils de représentation de la fonction les plus utilisés à la fin du secondaire et au cégep. Son utilisation est habituellement réservée à la représentation de fonctions ayant comme domaine et codomaine l'ensemble \mathbb{R} ou certains sous-ensembles de \mathbb{R} . Cette représentation peut aussi être généralisée pour des fonctions de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} avec un *espace* cartésien. Nous nous concentrerons toutefois sur le plan cartésien.

Un axe horizontal permet de représenter le domaine ou un sous-ensemble du domaine. Un axe vertical permet de représenter le codomaine ou un sous-ensemble du codomaine. Généralement, chacun de ces axes est gradué et ceux-ci s'intersectent à la valeur 0. Chaque point du plan

représente un élément $(x, f(x))$ du graphe de la fonction f . La position du point relative à l'axe horizontal représente la valeur de x et la position du point relative à l'axe vertical représente la valeur de $f(x)$.

Grâce à cette représentation, il est possible d'illustrer des approximations de la fonction entre les valeurs évaluées. Ainsi, beaucoup d'information supplémentaire obtenue par des moyens analytiques et géométriques peut être utilisée pour préciser la représentation de la fonction. Prenons par exemple la fonction sin ayant comme domaine et codomaine l'ensemble \mathbb{R} . Supposons qu'on souhaite représenter cette fonction restreinte à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Le tableau 1 présente certains éléments du graphe. Grâce à des outils analytiques, on peut montrer que sin est continue sur \mathbb{R} , croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, convexe sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ et concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Avec ces informations, on peut déduire l'allure du graphe et créer la figure 5. Bien que la représentation soit majoritairement composée d'approximations, celle-ci nous permet d'avoir une vue globale de la fonction.

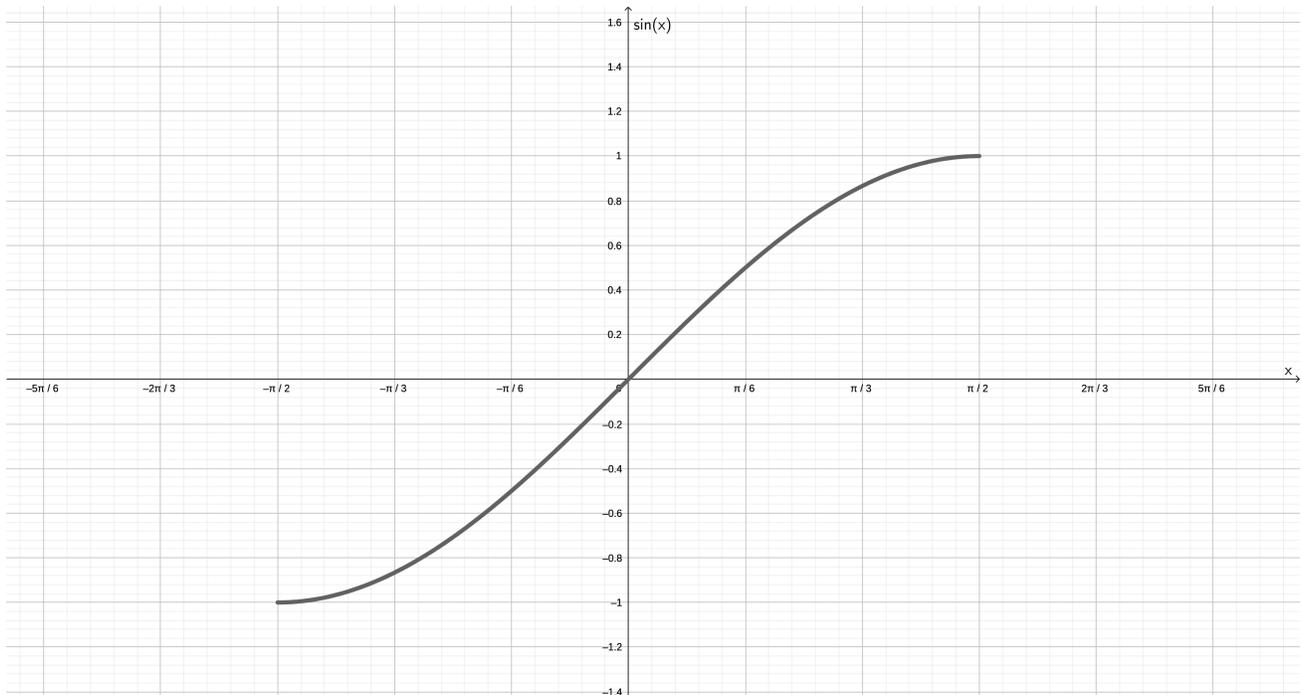


FIGURE 5 – Représentation du graphe de la fonction sinus restreinte à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans le plan cartésien.

2.3 Une conception robuste des fonctions à valeurs réelles

Les définitions 1 et 3 de la fonction sont générales. Elles ne prennent pas en considération la structure topologique du domaine et du codomaine. Le diagramme sagittal ne permet pas, non plus, de faire ressortir cette structure. Or, la structure des nombres réels est essentielle pour discuter des concepts de variation, de limite, de continuité ou de dérivée. Par exemple, la variation repose sur une notion de distance et d'ordre (ou de direction) qui est absent des définitions générales de la fonction et du diagramme sagittal.

Une conception robuste de la fonction permet de raisonner à propos de mathématiques dynamiques. Ainsi, une conception de la fonction qui prend en compte la structure des ensembles impliqués serait plus robuste qu'une conception de la fonction qui l'ignore. En effet, la compréhension de la relation unidirectionnelle et constante entre l'argument et son image est dépendante de cette structure. Par exemple, prenons une fonction f à valeurs réelles et dérivable. D'abord, le fait de travailler avec les nombres réels devrait induire une notion d'ordre dans la relation. Ceci permet de préciser l'adaptation dynamique de $f(x)$ selon x comme étant plutôt un **variation** dynamique de $f(x)$ selon x . De plus, puisque f est dérivable, cette variation dynamique de $f(x)$ a la propriété d'être proportionnelle à la variation de x .

2.4 La dérivée

2.4.1 Définitions

La dérivée de fonctions à valeurs réelles est une notion généralement introduite lors du premier cours de calcul au cégep. On réutilise cette idée dans plusieurs cours de sciences et de génie à l'université. Celle-ci se généralise à des fonctions de plusieurs variables réelles.

Pour débiter, introduisons les définitions de la dérivée que l'on retrouve dans les cours universitaires ou en recherche mathématique. Voici une définition de la dérivée d'une fonction à valeurs réelles tirée du livre *Principles of mathematical analysis* de Walter Rudin [26]. Notons que cette définition est écrite au chapitre 5 de ce livre et qu'elle demande des prérequis en ce qui a trait à la notion de limite.

Définition 4. (Dérivée d'une fonction à valeurs réelles)

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle $[a, b]$. Pour chaque $x \in [a, b]$, on forme le quotient

$$\phi(x) := \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad (a < t < b, t \neq x)$$

et on définit

$$f'(x) := \lim_{t \rightarrow x} \phi(t)$$

Voici maintenant la définition de la dérivée d'une fonction à plusieurs variables tirée du même ouvrage [26]. Celle-ci apparaît au chapitre 9 du livre et est précédée de plusieurs justifications.

Définition 5. (Dérivée d'une fonction à plusieurs valeurs réelles)

Soit E un ensemble ouvert de \mathbb{R}^n , f une fonction de E vers \mathbb{R}^m et $x \in E$. S'il existe une transformation linéaire A de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^m telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - Ah|}{|h|} = 0$$

alors on dit que f est dérivable en x et on écrit $f'(x) = A$.

Remarquons que cette définition généralise la définition de la dérivée d'une fonction à valeurs réelles. Il est aussi intéressant de voir l'importance particulière qu'on apporte à l'idée de *transformation linéaire* dans cette définition.

Maintenant, regardons les définitions de la dérivée qu'on retrouve dans certains manuels modernes utilisés en enseignement collégial. Dans le livre *Calcul différentiel* de James Stewart [34], on introduit la définition après l'avoir expérimentalement découverte avec la résolution d'un problème physique (vitesse/déplacement) qui inclut l'utilisation de la pente d'une droite tangente à la courbe.

Définition 6. (Dérivée d'une fonction à valeurs réelles)

La dérivée d'une fonction f en un nombre a , notée $f'(a)$, est

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si cette limite existe.

Cette définition est ensuite suivie de la forme de l'expression présentée dans la définition 4 (obtenue par changement de variables). On présente ensuite les taux de variation moyen et instantané. Notons que le taux de variation instantané en un point $a \in \mathbb{R}$ est présenté comme étant la limite du taux de variation moyen lorsque l'intervalle de cette variation tend vers le singleton $\{a\}$.

Dans le manuel *Calcul différentiel* de Josée Hamel et Luc Amyotte [15], on débute par présenter les notions de taux de variation, de taux de variation moyen et de taux de variation instantané. La définition de la dérivée offerte par la suite renvoie directement à la notion de taux de variation instantané : « la dérivée d'une fonction $f(x)$ en un point $x = a$ est le taux de variation instantané de la fonction $f(x)$ en $x = a$. » Voici la définition du taux de variation instantané.

Définition 7. (Dérivée d'une fonction à valeurs réelles)

Le taux de variation instantané [c'est-à-dire la dérivée] de la fonction $f(x)$ en $x = a$ est la pente de la droite tangente à la courbe décrite par $f(x)$ en $x = a$. [...] C'est-à-dire $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ [ou] $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$.

Les définitions précédentes présentent la même expression symbolique de la dérivée, à l'exception de la définition 5 qui est beaucoup plus générale. Toutefois, chaque expression est amenée et précisée de façon différente.

2.5 Représentation de la dérivée dans le plan

2.5.1 Survol de quelques représentations

Pour représenter la dérivée, il faut faire appel à une représentation de la fonction. À la lumière de la section 2.3, il est préférable que la représentation de la fonction choisie puisse tirer profit de la structure des nombres réels. En effet, cela permet d'encourager une conception robuste de la fonction. Dans cette perspective, le plan cartésien semble être une représentation efficace pour introduire la dérivée. D'ailleurs, les deux manuels étudiés précédemment ([34] et [15]) utilisent le plan cartésien à cet effet. La définition 7 décrit comment interpréter la dérivée d'une fonction représentée dans le plan cartésien. Elle permet aussi de mettre en lumière l'importance de la droite tangente dans cette représentation.

L'intuition derrière la droite tangente est l'idée d'une droite qui effleure ou qui épouse bien la courbe en un point. Dans le manuel de James Stewart (page 180), on représente la pente de cette droite par la pente qu'on obtient lorsqu'on « regarde le point [de tangence] d'assez près ». Toutefois, dans les deux manuels ([34] et [15]), la construction visuelle de la droite tangente à laquelle on accorde le plus d'importance (et celle la plus utilisée) est celle obtenue par une limite de droites sécantes.

2.5.2 La pente d'une limite de droites sécantes

Cette façon de construire visuellement la tangente consiste à prendre une suite de droites définies par le point de tangence lui-même et un point de la courbe qui s'approche de plus en plus du point de tangence. Si la fonction est dérivable au point de tangence, alors la tangente est la limite de ces droites. La dérivée de la fonction au point de tangence correspond ainsi à la pente de la tangente.

2.5.3 La dérivée : la limite des pentes d'une suite de droites sécantes

Dans la représentation précédente, la dérivée est interprétée comme étant la pente d'une droite qui correspond à la limite d'une suite de droites sécantes à la courbe. Pourtant, la dérivée, telle que décrite dans la définition 4, pourrait être interprétée comme la limite de la pente d'une suite de droites. Chaque terme de la suite pourrait représenter l'expression de la pente d'une fonction affine.

Dans la première interprétation, la dérivée est une propriété d'une fonction affine particulière. Cette fonction correspond à la *limite* d'une suite de fonctions affines. Dans la deuxième interprétation, la dérivée correspond à la limite d'une suite de nombres réels. Chaque terme pourrait correspondre à la pente d'une fonction affine. Pour mieux cerner cette distinction, tentons de décrire plus précisément cette représentation de la dérivée.

On pourrait décrire la construction de la tangente de la façon suivante. Soit f une fonction dérivable de \mathbb{R} vers \mathbb{R} et $c \in \mathbb{R}$. Supposons qu'on souhaite obtenir la tangente du graphe de f en $(c, f(c))$. Soit $(x_n, f(x_n))$ une suite de points qui convergent (avec la métrique euclidienne) vers $(c, f(c))$, le point de tangence, et telle que $x_n \neq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions affines telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_n, f(x_n)) \in \mathcal{G}(D_n)$ et $(c, f(c)) \in \mathcal{G}(D_n)$ (où $\mathcal{G}(D_n)$

représente le graphe de D_n). Alors on peut voir la tangente T comme étant une fonction affine de \mathbb{R} vers \mathbb{R} telle que D_n converge simplement vers T (voir la figure 6). Ainsi, si T existe, on a que

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} (x - x_n) + f(x_n) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

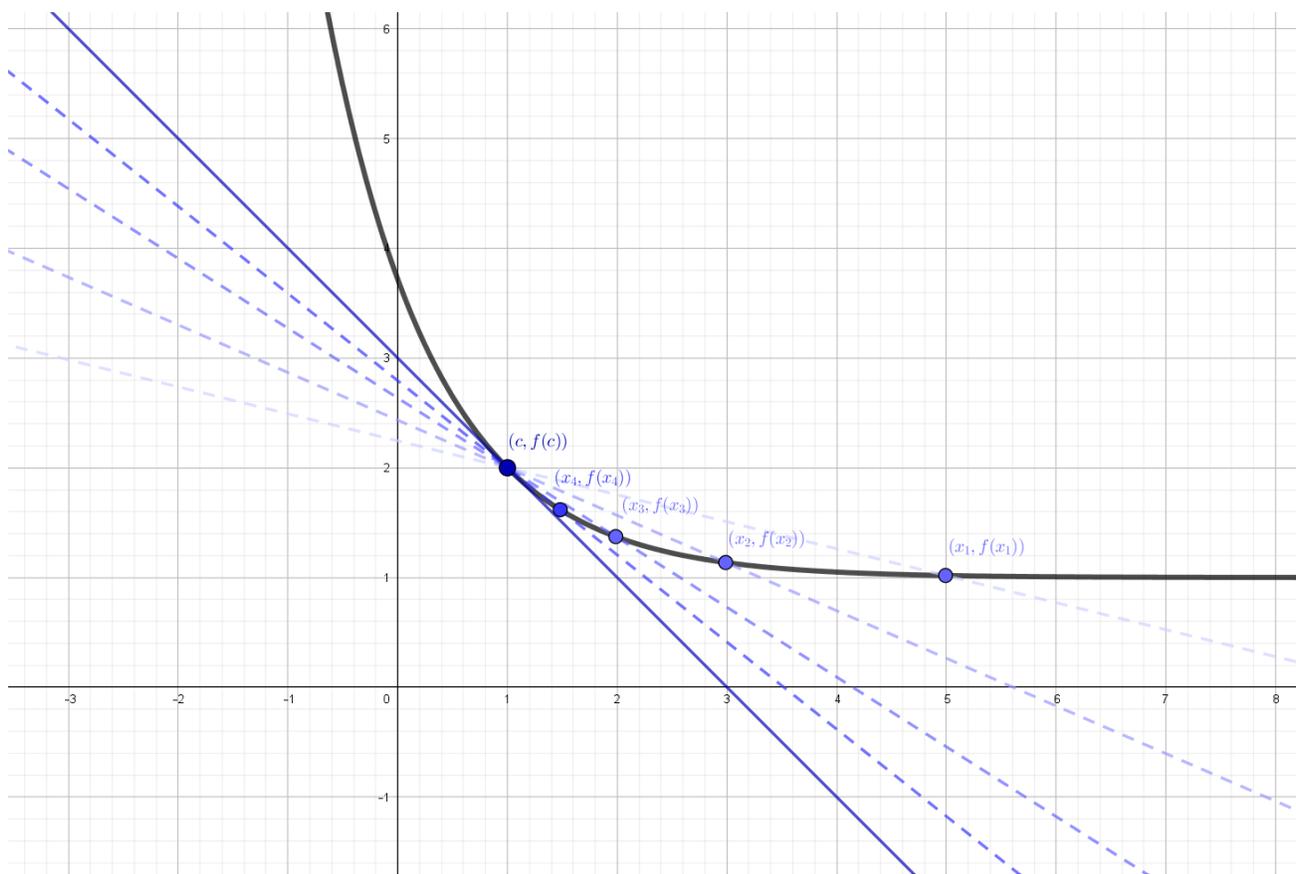


FIGURE 6 – Construction d'une droite tangente par une limite de droites sécantes.

La dérivée, notée $f'(c)$, est représentée par la pente de la droite tangente. Autrement dit, on a que

$$f'(c) = \frac{T(x) - T(c)}{x - c} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}.$$

Notons que cette représentation symbolique de la dérivée cache le processus de limite nécessaire à l'obtention de T . Ceci pourrait mener à une conception de la dérivée qui « ignore le processus de limite » telle que décrite par Allison Dorko [9]. De plus, cette représentation ne correspond pas exactement à l'expression de la pente de la droite tangente offerte à la définition 7. Pourtant, dans la définition 7, on indique explicitement que l'expression introduite correspond à la pente de la droite tangente. La démarche proposée précédemment, basée sur la représentation de la dérivée comme la pente d'une droite tangente, ne mène pas exactement à cette expression.

Intuitivement, puisque $D_n(x)$ approche $T(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pourrait se convaincre que la pente des fonctions affines D_n approche la pente de T . En acceptant cette idée, on peut obtenir la définition 7 à partir de la représentation de la dérivée comme étant la pente de la droite tangente.

Notons toutefois qu'en enseignement, on justifie rarement le fait que la pente de la limite des fonctions affines est égale à la limite de la pente des fonctions affines. Pour démontrer cette égalité, on peut utiliser la linéarité de la limite d'une suite convergente de nombres réels. En effet, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$, on a que

$$f'(c) = \frac{T(x) - T(c)}{x - c} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} D_n(c)}{x - c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n(x) - D_n(c)}{x - c}. \quad (2)$$

Puisque la pente d'une fonction affine est constante dans le domaine, pour $n \in \mathbb{N}$, on a que

$$\frac{D_n(x) - D_n(c)}{x - c} = \frac{D_n(x_n) - D_n(c)}{x_n - c} = \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}. \quad (3)$$

Ainsi, on peut déduire l'égalité suivante :

$$f'(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}. \quad (4)$$

La démarche précédente permet de mettre en lumière certaines subtilités qui doivent être prises en compte dans l'interprétation de la représentation de la fonction comme étant la pente de la droite tangente.

2.5.4 Commentaires sur l'analyse de la représentation de la dérivée dans le plan

Il est possible de modifier l'expression obtenue à l'équation 4 afin d'obtenir d'autres représentations symboliques de la dérivée. En particulier, puisque la suite x_n est une suite quelconque qui converge vers c , on peut remplacer la notation de la limite pour obtenir une expression plus compacte :

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}. \quad (5)$$

De plus, en posant $h := x - c$, on obtient une autre expression de la dérivée.

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}. \quad (6)$$

2.5.5 Le dynamisme dans la représentation de la dérivée

Le processus de limite de droites sécantes décrit dans la section précédente peut être représenté dynamiquement. On introduit une droite passant par un certain point P du graphe de f et par le point $(c, f(c))$. En approchant le point P du point $(c, f(c))$ dynamiquement, la droite s'adapte en conséquence et s'approche de plus en plus de la tangente du graphe de f en $(c, f(c))$.

Voici un exemple interactif fait avec l'application Desmos [21] du processus de rapprochement dynamique de deux points pour construire la tangente :
<https://www.desmos.com/calculator/tz90rgtxrb>.

Dans ce programme, on peut glisser-déposer un point pour définir le point de tangence et glisser-déposer l'autre point tranquillement près du premier pour voir le processus de rapprochement de la droite vers la droite tangente.

2.5.6 La représentation de la non-dérivabilité d'une fonction

Lorsqu'on tente de construire la droite tangente en un point $c \in \mathbb{R}$ où notre fonction n'est pas dérivable, on remarque que plusieurs problèmes de l'ordre de l'analyse ou de la représentation peuvent survenir. Ces situations peuvent permettre de conclure que notre fonction n'est pas dérivable en c . D'une part, il est possible que la limite des droites D_n n'existe tout simplement pas pour un certain choix de suite x_n . On conclut alors qu'il n'existe pas de tangente et donc notre fonction n'est pas dérivable en ce point. D'autre part, il se pourrait que *différentes tangentes* soient obtenues selon le choix des x_n . Il s'agit encore là d'un indice permettant de conclure que notre fonction n'est pas dérivable en c . Ainsi, on conclut que, par exemple, s'il y a un saut en c (f est discontinue en c) ou s'il y a un coin en c (la dérivée obtenue par une limite à gauche n'est pas égale à la dérivée obtenue par une limite à droite), alors f n'est pas dérivable en c .

Notons que cette représentation de la dérivée doit être utilisée avec soin pour des points où la fonction n'est pas dérivable. En effet, l'utilisateur doit comprendre, d'une part, que dans le contexte de la dérivée de fonctions, la tangente, lorsqu'elle existe, est unique. D'autre part, il doit comprendre que cette droite tangente doit être obtenue, peu importe le choix de la suite x_n . Il faut ainsi être en mesure de vérifier que la limite obtenue ne dépend pas du choix particulier de suite x_n .

2.5.7 Interprétation et conception de la dérivée selon sa représentation

Lorsqu'on utilise une représentation de la dérivée dans le plan, la dérivée peut être interprétée comme étant, **avant tout**, *la pente* de la courbe en un certain point (c'est-à-dire, la pente de la droite tangente à la courbe décrite par le graphe de la fonction). Une conception de la dérivée qui repose sur une telle interprétation pourrait amener à voir la dérivée quasiment exclusivement de façon géométrique dans le plan. Avec une telle conception, la dérivée pourrait être vue comme étant un outil permettant de produire de meilleurs graphes. Elle pourrait servir de mesure pour l'angle de la pente du graphe. Elle pourrait permettre de trouver les creux et les sommets de la courbe décrite par le graphe de la fonction. Elle pourrait permettre d'identifier les vallées (régions convexes) et les collines (régions concaves). Elle pourrait donner de l'information sur les comportements limites de la courbe. Pour résumer, cette représentation pourrait mener à une conception de la dérivée entièrement fondée selon la représentation graphique de la fonction dans le plan cartésien.

Une telle conception de la dérivée basée sur le graphe des fonctions peut s'avérer bien pratique lorsque vient le temps de trouver les extremums d'une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . En effet, la représentation nous permet de déduire que, lorsqu'on fait face à une fonction dérivable, les extremums locaux n'ont nul autre choix que d'être sur le sommet des montagnes ou dans le

creux de vallées. Le fait que la dérivée s'annule à ces endroits est aussi bien représenté.

Notons que la notion de tangence peut s'appliquer à d'autres objets mathématiques que la courbe décrite par le graphe des fonctions. Elle peut être utilisée avec n'importe quel lieu géométrique assez régulier du plan. Autrement dit, l'idée de droite tangente repose uniquement sur l'idée de propriété locale d'un lieu géométrique respectant certaines conditions de "régularité". L'algorithme consistant à prendre des droites sécantes pourrait ainsi fonctionner pour n'importe quelle courbe assez régulière du plan. Le concept de tangence peut même s'appliquer à des lieux géométriques de l'espace ou à des objets physiques de la vie réelle. Toutefois, dans ces situations, la droite tangente obtenue n'est pas nécessairement unique. Une conception de la dérivée basée sur la représentation graphique de la fonction pourrait permettre d'accepter plus facilement une telle généralisation.

3 Motivation

Ayant un fort intérêt pour les représentations visuelles en mathématiques, j'écoute régulièrement des vidéos faites par Grant Sanderson dans sa chaîne YouTube *3Blue1Brown*. C'est ainsi que j'ai écouté la vidéo intitulée *What they won't teach you in calculus*. [32]. Dans cette vidéo, Grant présente ce qu'il appelle la vue transformationnelle (*transformational view*) de la fonction (voir la figure 7) et utilise cela pour résoudre une *énigme mathématique*. En particulier, dans cette résolution, on utilise la méthode d'itération du point fixe (*Fixed-point iteration*) et on utilise la représentation introduite pour mieux comprendre l'algorithme.

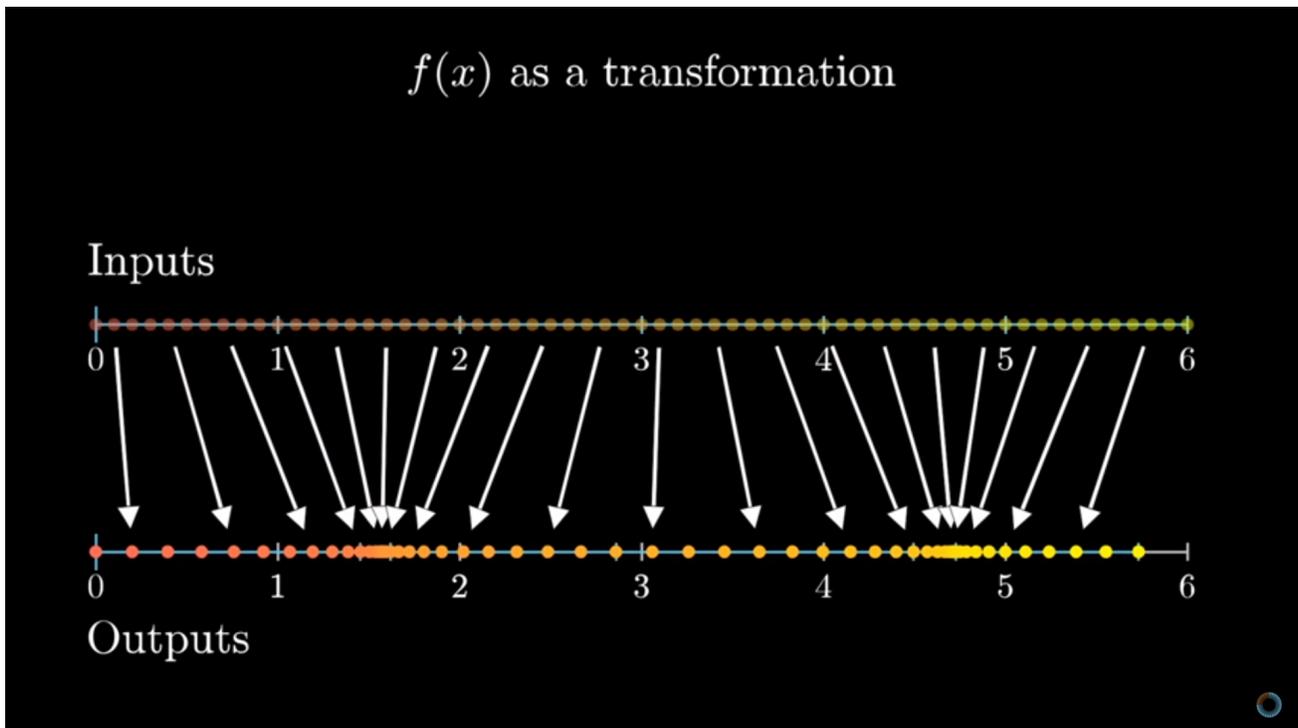


FIGURE 7 – Capture d'écran de la vidéo *What they won't teach you in calculus*. [32]. Cette image présente un aperçu de la vue transformationnelle de la fonction introduite par Grant Sanderson.

Cette représentation m'a permis d'enrichir ma conception de plusieurs objets mathématiques reliés à la fonction. Elle m'a aussi amené à me questionner sur plusieurs aspects. Outre les quelques fonctions montrées en exemples dans la vidéo, à quoi ressemble les autres fonctions avec cette représentation ? Qu'arrive-t-il à la représentation avec des fonctions moins régulières (discontinuités, pôles, etc.) ? Qu'est-ce que cette représentation de la dérivée peut apporter au point de vue conceptuel ? Que peut-on déduire d'autre à partir de cette représentation ? Pouvons-nous la généraliser ?

Afin de répondre à ces questions, j'ai développé une application qui permet d'utiliser efficacement cette représentation de la fonction (voir la figure 30 à la page 47). Celle-ci m'a permis d'accélérer mon exploration. J'avais, au préalable, tenté de trouver une application qui pouvait m'offrir les fonctionnalités nécessaires pour mes recherches, mais mes recherches furent infructueuses². Puisqu'il peut être très laborieux d'utiliser cette représentation sans l'ordinateur, le développement de l'application s'imposait. Grâce à celle-ci, j'ai pu faire des expériences et découvrir plusieurs faits impressionnants. En utilisant une nouvelle représentation de la fonction, mon exploration m'a amené dans des directions complètement différentes de ce que le plan cartésien, les tableaux ou les diagrammes sagittaux m'ont permis de voir. Ceci m'a permis de me poser des questions différentes, m'amenant ainsi à créer des liens nouveaux entre la fonction et différents concepts. Même avec un recul sur mon expérience d'apprentissage, certains de ces liens ne me semblent pas évidents à voir à l'aide des autres représentations. Représenter d'une nouvelle façon une notion mathématique aussi élémentaire et fondamentale m'a ainsi ouvert un nouvel univers.

La programmation de l'application m'a aussi amené à me questionner sur des points techniques à propos de la représentation. Cela m'a directement amené à développer davantage mon logiciel afin de le rendre accessible et pour que d'autres soient en mesure d'explorer comme je l'ai fait. Cette ressource est d'ailleurs disponible en ligne en français (<https://ggbm.at/sp4prvus>) et en anglais (<https://ggbm.at/rftwacsy>). Aujourd'hui, l'application est désormais disponible à partir de la description de la vidéo de Grant Sanderson [32] sur YouTube. J'ai aussi créé différents logiciels qui permettent de généraliser la représentation ou encore de mettre en lumière certains aspects importants. Ceux-ci sont décrits brièvement à la section 7.2, en annexe.

4 Le diagramme de liaisons

4.1 Description

Bien que j'aie, pour ma part, été inspiré par la représentation transformationnelle de la fonction présentée dans la vidéo de Sanderson [32], notons que cette représentation a déjà été utilisée auparavant. Celle-ci est généralement connue sous le nom de *diagramme de liaisons* (en anglais *mapping diagram*) et parfois nommée *dynagraphe* (voir Steketee, 2012 [33]). Dans l'ouvrage *Prof. E. McSquared's Calculus Primer : Expanded Intergalactic Version!* [35], un livre éducatif originalement paru en 1975 qui traite du calcul différentiel, on présente d'abord le diagramme de liaisons et on construit, par la suite, la représentation de la fonction dans le plan cartésien. La figure 8 présente un extrait de ce livre.

2. Martin Flashman a développé plusieurs applications liées au diagramme de liaisons [13]. Cependant, les fonctionnalités offertes ne correspondaient pas à mes besoins.

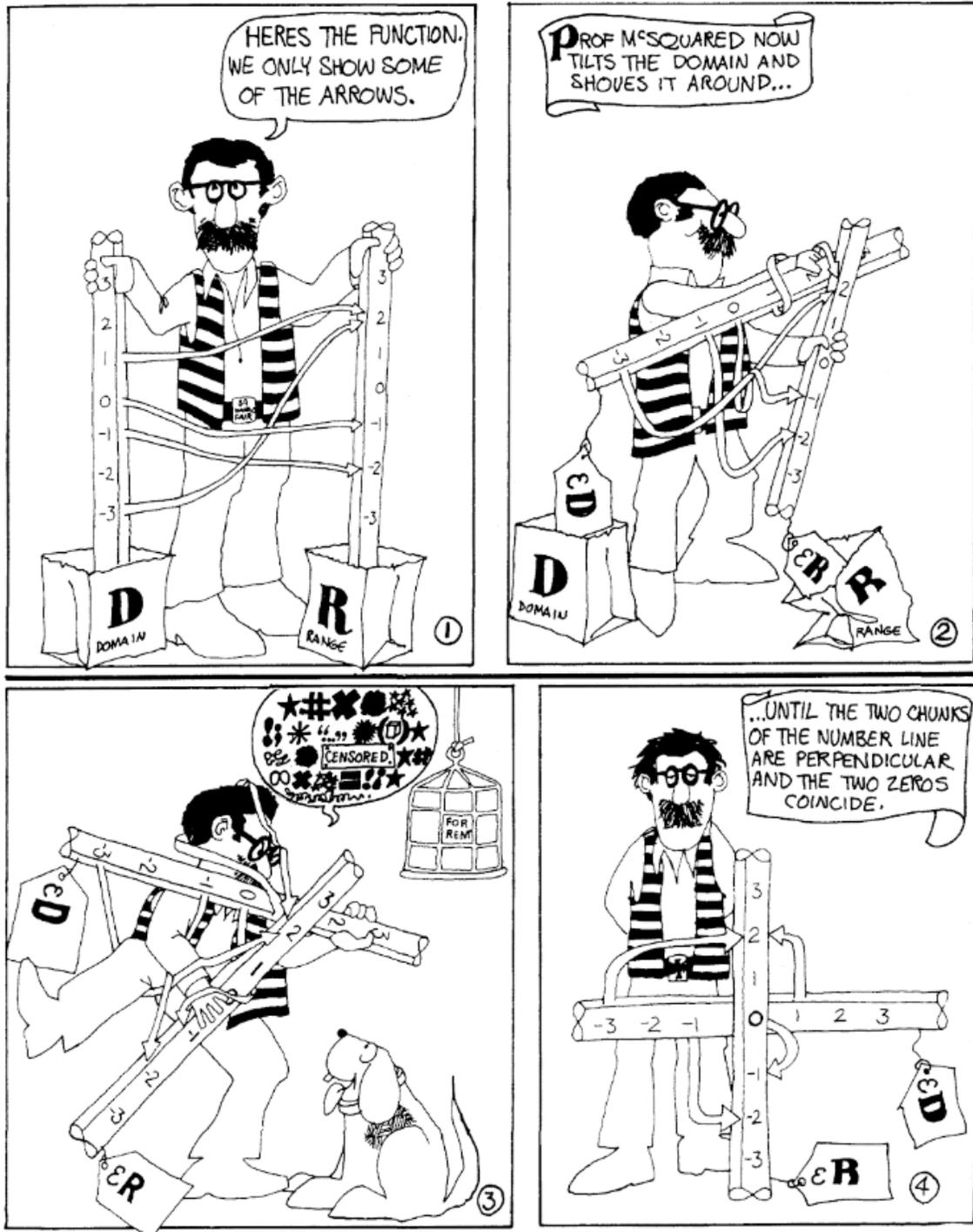


FIGURE 8 – Bande dessinée tirée du livre *Prof. E. McSquared's Calculus Primer : Expanded Intergalactic Version!* [35]. Cette illustration introduit les explications de la relation entre le diagramme de liaisons et la représentation de la fonction dans le plan cartésien.

Le diagramme de liaisons est une représentation de la fonction utilisée pour les fonctions à valeurs réelles. Celui-ci est semblable au diagramme sagittal. En changeant la représentation du domaine et du codomaine pour des droites graduées dans le diagramme sagittal, on fait ressortir la métrique de ces ensembles et on obtient directement le diagramme de liaisons. Dans le document présent, on représente le domaine par une droite graduée horizontale et le codomaine par une droite graduée parallèle située sous le domaine. Tout comme le diagramme sagittal, des flèches (ou des segments) sont utilisées pour représenter les relations entre les éléments du domaine et du codomaine. Toutefois, si la fonction représentée contient, dans son domaine, un intervalle, seulement un nombre fini de points de cet intervalle pourra être représenté. L'ensemble des points choisis pour représenter la fonction s'appelle l'échantillon. La figure 9 montre le graphe de la fonction $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ restreinte à $[-1, 1]$ dans le plan cartésien alors que la figure 10 présente son diagramme de liaisons.

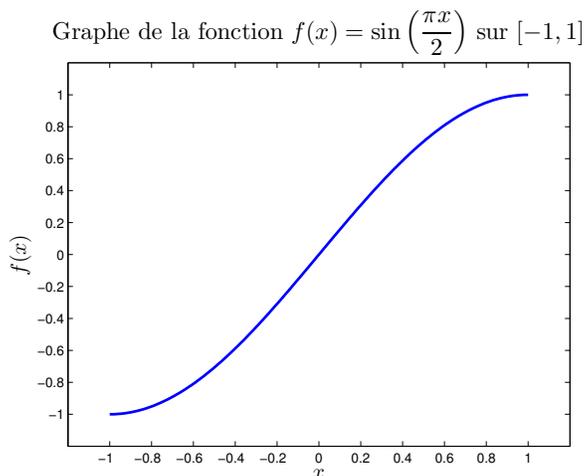


FIGURE 9 – Représentation du lieu géométrique défini par le graphe de f dans le plan.

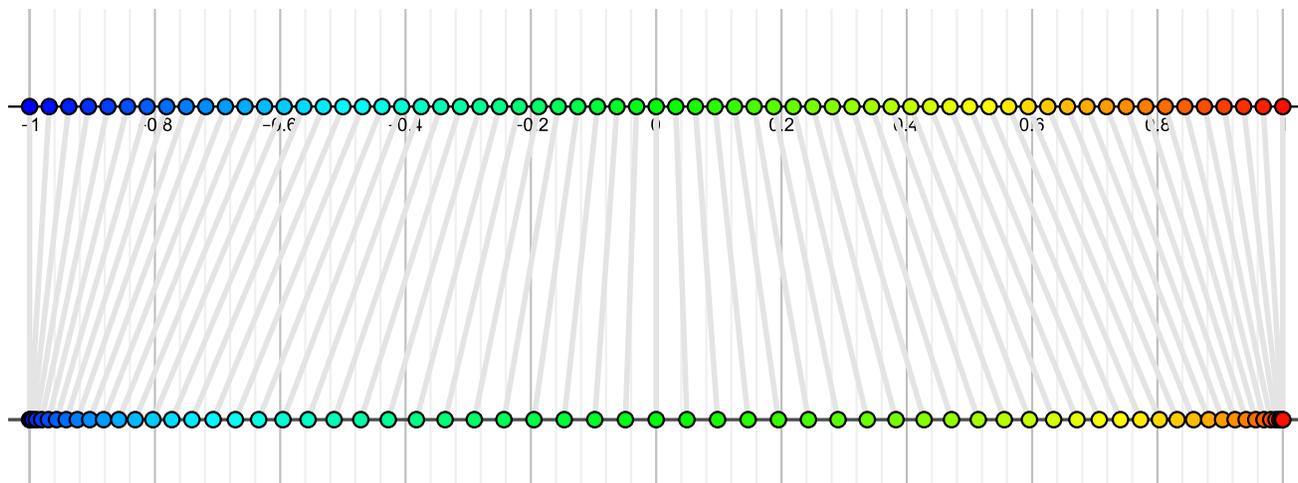


FIGURE 10 – Diagramme de liaisons de la fonction $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ sur $[-1, 1]$. Chaque point de l'échantillon du domaine (droite horizontale supérieure) est associé à son image dans le codomaine (droite horizontale inférieure).

4.2 Implémentation

Construire la représentation d'une fonction à valeurs réelles à l'aide d'un crayon et d'un papier peut être laborieux. Selon la taille de l'échantillon choisi, il peut y avoir une grande quantité de relations à évaluer et à dessiner. Heureusement, de nos jours, l'ordinateur nous permet de représenter des fonctions rapidement à l'écran, et ce, avec une précision remarquable. En revanche, très peu de logiciels permettent de représenter les fonctions à l'aide du diagramme de liaisons de façon efficace. C'est une des raisons pour laquelle j'ai créé l'application RTF (détails en annexe à la section 7.1, p.47). Plusieurs des figures du présent document ont été générées à l'aide de cette application.

En plus de permettre la création rapide de diagrammes de liaisons, l'application RTF ajoute du dynamisme et de l'interactivité à la représentation. D'abord, le bouton *Transformation* permet de déplacer les points de l'échantillon à leur image respective. Ceci permet de voir plus aisément où est envoyé chaque point individuellement. Ensuite, les curseurs « x » et « $f(x)$ » permettent de voir le comportement de la fonction entre les points de l'échantillon. En déplaçant le curseur « x », le curseur « $f(x)$ » s'adapte automatiquement pour correspondre à l'image de x . Ceci permet de représenter la relation dynamique entre x et son image : un aspect important d'une conception robuste de la fonction. Les curseurs permettent aussi d'étendre la représentation de la fonction au-delà de l'échantillon. Ceci permet d'offrir des informations supplémentaires à l'utilisateur de la représentation. Par exemple, en offrant un déplacement continu du curseur « $f(x)$ » en réponse à un déplacement continu du curseur « x », on indique à l'utilisateur que la fonction est continue sur l'intervalle de déplacement. De plus, l'application permet de représenter facilement la composition de fonctions.

4.3 Interprétation de la dérivée

4.3.1 Description générale

Voici une façon d'interpréter la dérivée d'une fonction selon son diagramme de liaisons. Cette interprétation correspond à celle proposée par Grant Sanderson dans sa vidéo [32]. Elle correspond aussi à ce que Martin Flashman, professeur émérite de la *Humboldt State University*, décrit sur son site internet personnel [13] ou encore à ce que Fred Kuczarski propose dans son article *Rubber Band Calculus* [19].

La norme de la dérivée d'une fonction dérivable en un point c est approximativement le rapport de la distance entre les points de l'image de l'échantillon près de c et la distance entre leur préimage respective. Il s'agit d'une mesure de dispersion des points de l'image. Si l'ordre des points de l'image reste inchangé, le signe de la dérivée est positif. Si l'ordre des points est renversé, le signe est négatif. Raffiner l'échantillon permet d'améliorer cette approximation. En réduisant la distance entre les points de l'échantillon, ce rapport tend vers la dérivée. Dans ce contexte, on dit que la dérivée est une mesure signée de la dispersion des points de l'image dans le voisinage du point c .

Intuitivement, cette quantité pourrait représenter la dérivée puisqu'elle est très semblable au taux de variation instantané tel que décrit dans le manuel de James Stewart [34]. En effet, la

distance entre les points de l'image représente l'amplitude de la variation et l'ordre des points de l'image représente la direction de la variation (positive ou négative). En divisant par la distance des points de la préimage correspondante, on obtient le rapport de la variation de l'image selon la variation du domaine. Cette quantité correspond au taux de variation moyen. En raffinant l'échantillon, on réduit la variation du domaine. Donc, à la limite, on obtient le taux de variation instantané.

4.3.2 Description plus rigoureuse

Voici une description plus rigoureuse de l'interprétation la dérivée en un point $c \in \mathbb{R}$ d'une fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} dérivable selon son diagramme de liaisons. Soient $r > 0$, $B_r(c) = \{x \in \mathbb{R} : |x - c| < r\}$ le voisinage de c de rayon r , $X_r = \{a_1, a_2, \dots, a_{N(r)}\} \subset \mathbb{R}$ un ensemble fini (nommé «l'échantillon») tel que $a_n < a_{n+1}$ et $a_{n+1} - a_n < r$ pour tout $n \leq N$. Soient $x_r, y_r \in X_r \cap B_r(c)$ deux points arbitraires de l'échantillon dans le voisinage de c . Alors, la dérivée de f peut s'écrire

$$f'(c) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(y_r) - f(x_r)}{y_r - x_r}. \quad (7)$$

4.3.3 Commentaires

Cette expression de la dérivée est semblable à la définition 4. Cependant, puisqu'il s'agit d'une expression déduite d'une représentation visuelle, elle contient certaines notions additionnelles qui ne sont pas nécessaires d'un point de vue analytique. Entre autres, l'introduction d'un échantillon est superflue. Il aurait été suffisant de définir x_r et y_r comme étant des points quelconques de $B_r(c)$. Aussi, on aurait pu simplement définir $y_r = c$ pour tout $r \in \mathbb{R}$.

4.3.4 Exemples

Analysons ce qu'on peut observer à propos de la dérivée dans le diagramme de liaisons pour certaines situations clefs.

$f'(c) > 1$

On remarque que la distance séparant les points de l'image de l'échantillon près de $f(c)$ est plus grande que celle qui sépare les points de l'échantillon près de c . Autrement dit, se déplacer d'un point à l'autre dans l'échantillon près de c résulte en un déplacement dans l'image dans la même direction, mais plus grand. Les points de l'image se dispersent ou s'éloignent les uns des autres.

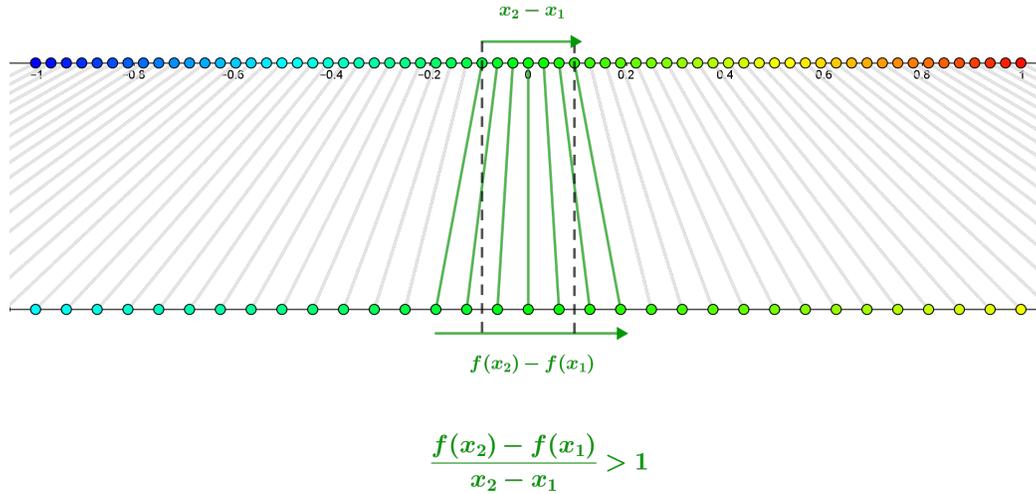


FIGURE 11 – Interprétation de $f'(c) > 1$ dans un diagramme de liaisons.

$f'(c) = 1$

On remarque que la distance séparant les points de l'image de l'échantillon près de $f(c)$ est égale à celle qui sépare les points de l'échantillon près de c . Autrement dit, se déplacer d'un point à l'autre dans l'échantillon près de c résulte en un déplacement identique dans l'image. La distance qui sépare les points de l'image ne semble pas avoir changé.

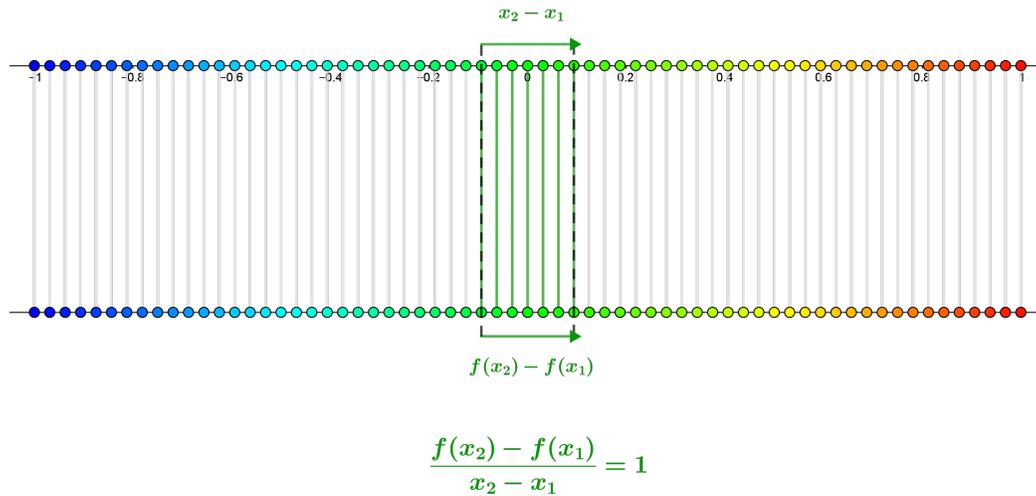


FIGURE 12 – Interprétation de $f'(c) = 1$ dans un diagramme de liaisons.

$$0 < f'(c) < 1$$

On remarque que la distance séparant les points de l'image de l'échantillon près de $f(c)$ est plus petite que celle qui sépare les points de l'échantillon près de c . Autrement dit, se déplacer d'un point à l'autre dans l'échantillon près de c résulte en un déplacement dans l'image dans la même direction, mais plus petit. Les points de l'image semblent se contracter.

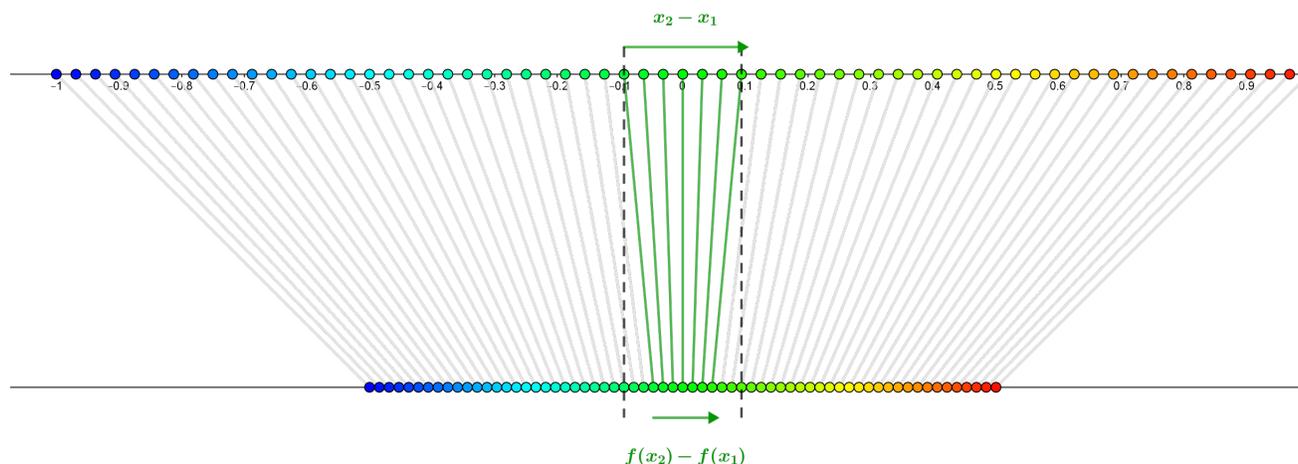


FIGURE 13 – Interprétation de $0 < f'(c) < 1$ dans un diagramme de liaisons.

$$f'(c) = 0$$

On remarque une grande concentration de points sur $f(c)$. Tous les points près de c semblent être envoyés directement vers la valeur $f(c)$. Autrement dit, se déplacer d'un point à l'autre dans l'échantillon près de c n'affecte pas l'image.

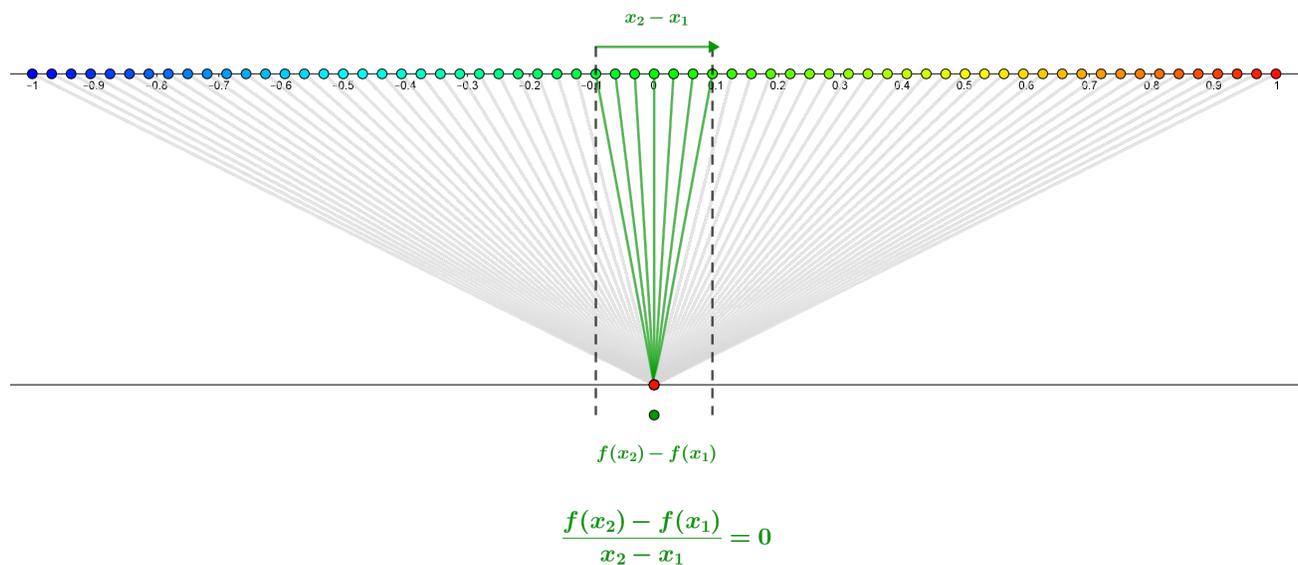


FIGURE 14 – Interprétation de $f'(c) = 0$ dans un diagramme de liaisons.

$$-1 < f'(c) < 0$$

On remarque que la distance séparant les points de l'image de l'échantillon près de $f(c)$ est plus petite que celle qui sépare les points de l'échantillon près de c . De plus, l'ordre des points de l'image de l'échantillon près de $f(c)$ est inversé par rapport à l'ordre des points de l'échantillon près de c . Autrement dit, se déplacer d'un point à l'autre dans l'échantillon près de c résulte en un déplacement dans l'image plus petit et dans la direction inverse. Les points de l'image semblent se contracter et l'ordre est renversé.

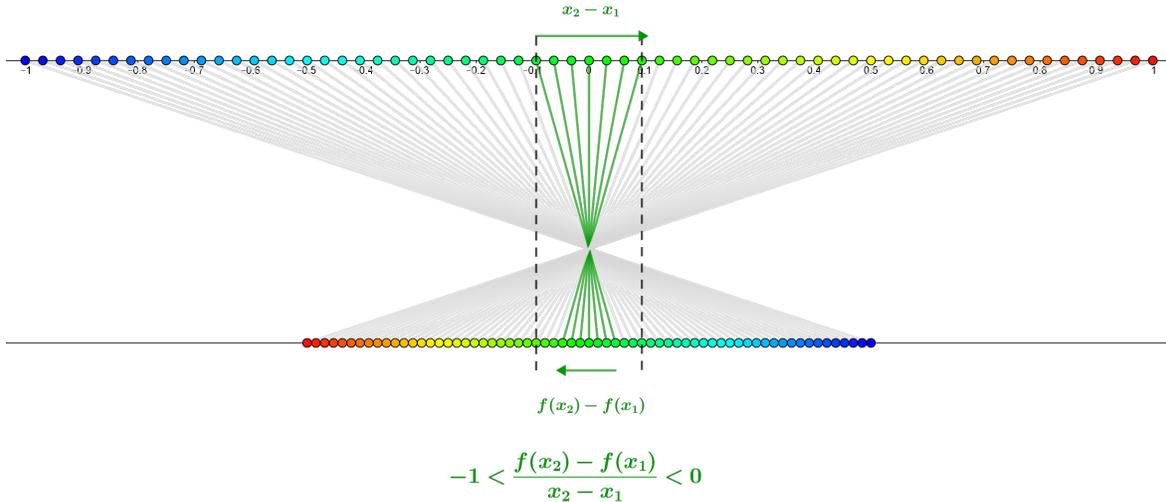


FIGURE 15 – Interprétation de $-1 < f'(c) < 0$ dans un diagramme de liaisons.

$$f'(c) = -1$$

On remarque que la distance séparant les points de l'image de l'échantillon près de $f(c)$ est la même que celle qui sépare les points de l'échantillon près de c . Cependant, l'ordre des points de l'image de l'échantillon près de $f(c)$ est inversé par rapport à l'ordre des points de l'échantillon près de c . Autrement dit, se déplacer d'un point à l'autre dans l'échantillon près de c résulte en un déplacement de même longueur, mais dans la direction inverse.

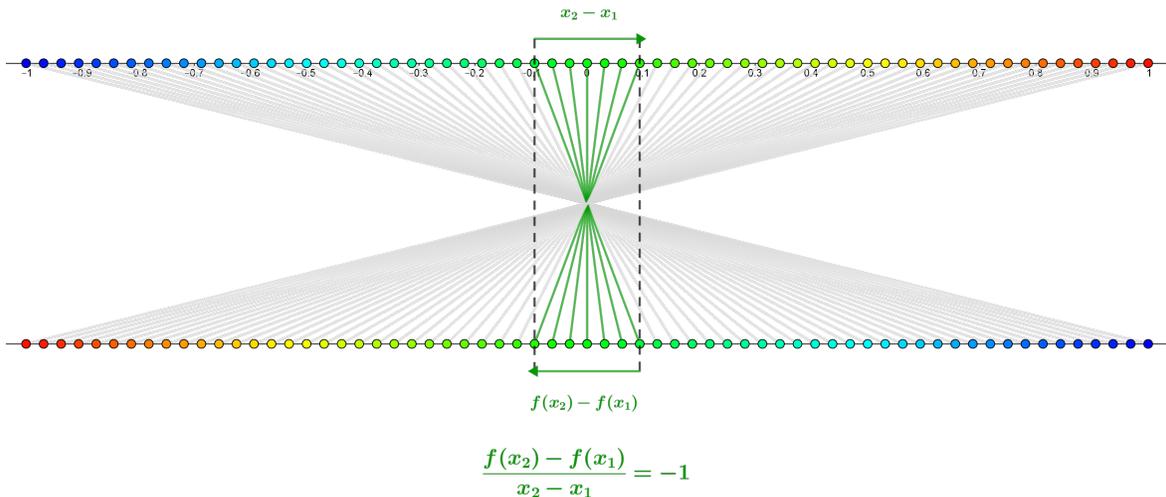


FIGURE 16 – Interprétation de $f'(c) = -1$ dans un diagramme de liaisons.

$f'(c) < -1$

On remarque que la distance séparant les points de l'image de l'échantillon près de $f(c)$ est plus grande que celle qui sépare les points de l'échantillon près de c . De plus, l'ordre des points de l'image de l'échantillon près de $f(c)$ est inversé par rapport à l'ordre des points de l'échantillon près de c . Autrement dit, se déplacer d'un point à l'autre dans l'échantillon près de c résulte en un déplacement dans l'image plus grand et dans la direction inverse. Les points de l'image semblent se disperser ou s'éloigner les uns des autres. De plus, l'ordre est renversé.

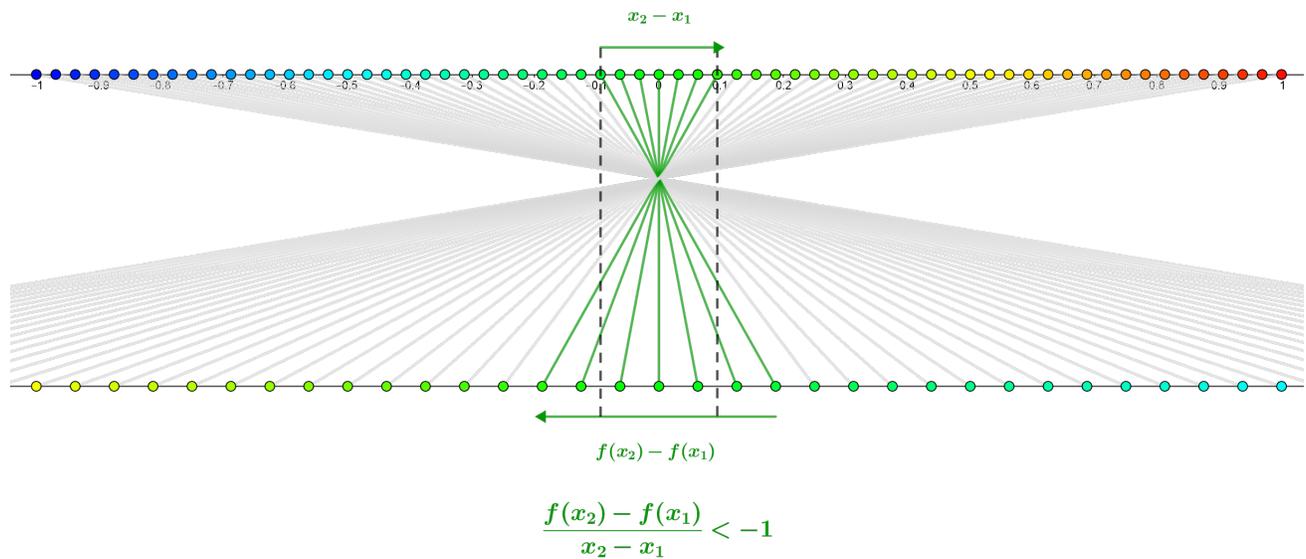


FIGURE 17 – Interprétation de $f'(c) < -1$ dans un diagramme de liaisons.

f est continue sur \mathbb{R} , mais $\lim_{x \rightarrow c^+} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^-} f'(x)$

Notons que dans ce cas, la fonction f n'est pas dérivable en c . Si $|\lim_{x \rightarrow c^+} f'(x)| \neq |\lim_{x \rightarrow c^-} f'(x)|$, alors on remarque que la distance entre l'image des points de l'échantillon juste un peu plus petits que c est différente de la distance entre l'image des points de l'échantillon juste un peu plus grands que c . Autrement dit, se déplacer d'un point à l'autre dans l'échantillon juste à gauche de c ne résulte pas en un déplacement de même longueur dans l'image qu'en se déplaçant d'un point à l'autre dans l'échantillon juste à droite de c . La figure 18 montre un exemple du diagramme de liaisons d'une fonction continue, mais non dérivable en un point. Si $-\lim_{x \rightarrow c^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f'(x)$, alors l'ordre des points de l'image de l'échantillon juste à gauche de c n'est pas le même que l'ordre des points de l'image de l'échantillon juste à droite de c . Autrement dit, se déplacer d'un point à l'autre dans l'échantillon juste à gauche de c résulte en un déplacement dans l'image qui est de direction opposée au déplacement dans l'image qui résulte du déplacement d'un point à l'autre dans l'échantillon juste à droite de c .

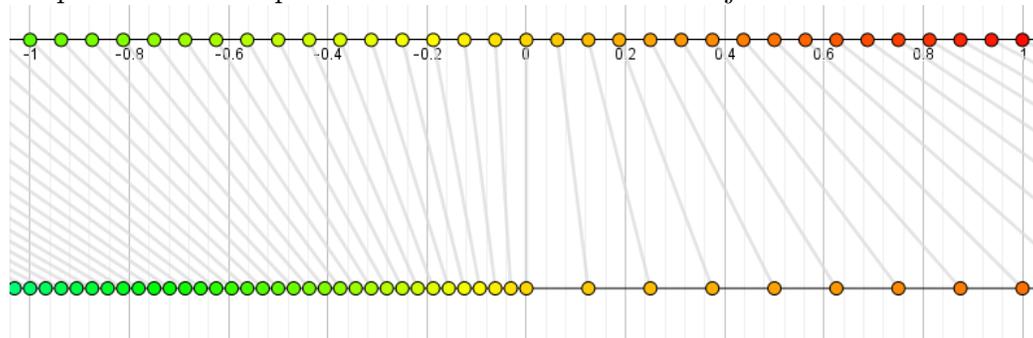


FIGURE 18 – Diagramme de liaisons de la fonction f sur $[-1, 1]$ définie par $f(x) := \frac{x}{2}$ pour $x < 0$ et $f(x) := 2x$ pour $x \geq 0$. Cette fonction est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

f est discontinue en c

En raffinant de plus en plus notre échantillon, on remarque que l'image de certains points de l'échantillon qui s'approchent de plus en plus de c ne s'approchent pas de $f(c)$. Autrement dit, dans ce contexte, l'image d'un point très près de c n'est pas nécessairement très près de $f(c)$. Afin de voir ce phénomène, il est préférable que le point c fasse partie de notre échantillon. La figure 19 présente un exemple de la représentation d'une discontinuité.

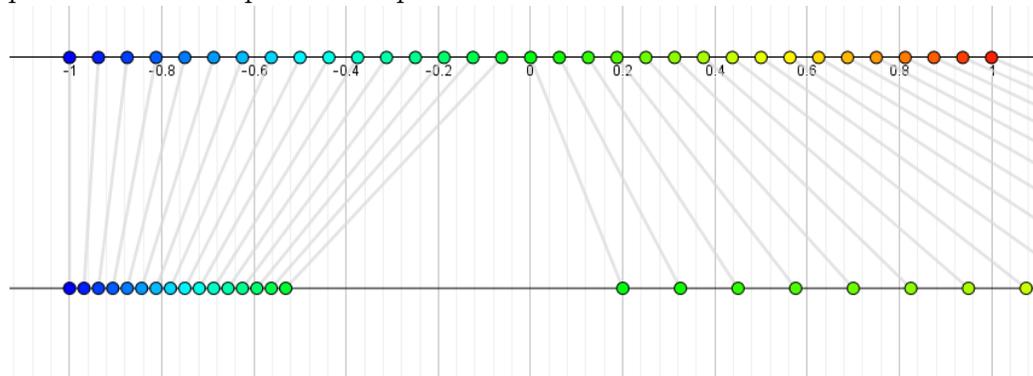


FIGURE 19 – Diagramme de liaisons de la fonction f sur $[-1, 1]$ définie par $f(x) := \frac{1}{2}(x - 1)$ pour $x < 0$ et $f(x) := 2x + \frac{1}{5}$ pour $x \geq 0$. Cette fonction est discontinue en 0.

4.4 La composition de fonctions

4.4.1 Représentation de la composition

Il peut être naturel d'utiliser, en guise d'échantillon, un ensemble de points également distancés. Toutefois, la représentation de la fonction demeure valide, peu importe le choix de l'échantillon. Cette propriété peut être exploitée afin de mettre en relief certains points importants du domaine. On peut aussi utiliser cela pour représenter la composition de fonctions. Pour représenter la fonction $g \circ f$, nous utilisons deux diagrammes de liaisons superposés. Le premier diagramme représente f et le deuxième g . L'échantillon du premier diagramme est personnalisable tandis que l'échantillon du deuxième diagramme est l'image de l'échantillon du premier diagramme. Nous pouvons ainsi voir, en deux étapes, l'association entre un point $x \in \mathbb{R}$ donné et $g(f(x))$. En effet, l'association $x \mapsto f(x)$ est représentée par un segment de x à $f(x)$ dans le premier diagramme. Ensuite, l'association $f(x) \mapsto g(f(x))$ est représentée par un segment reliant $f(x)$ à $g(f(x))$ dans le deuxième diagramme. En suivant le chemin créé par ces segments, on obtient la relation $x \mapsto g(f(x))$. La figure 20 montre un exemple de la représentation d'une composition de fonctions par diagrammes de liaisons.

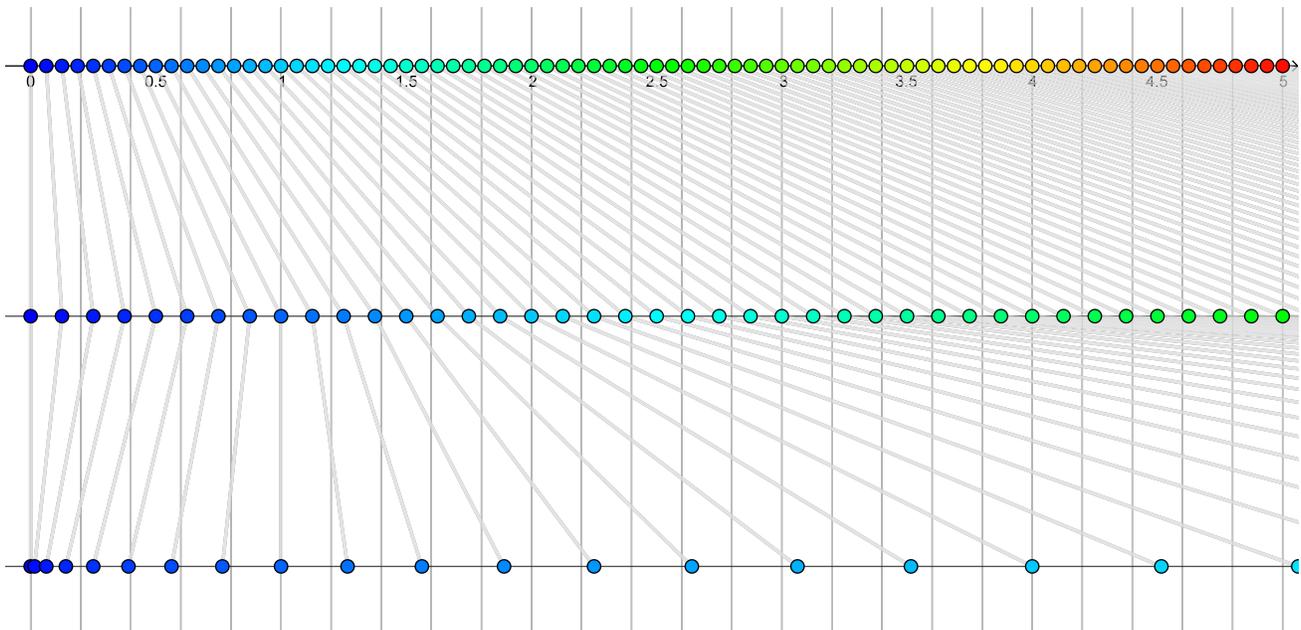


FIGURE 20 – Représentation de la fonction $g \circ f$ sur $[0, 5]$ par diagrammes de liaisons où $f(x) = 2x$ et $g(x) = x^2$.

Notons que le diagramme de liaisons nous permet de représenter la composition d'un nombre arbitraire de fonctions. Supposons qu'on souhaite représenter la composition de fonctions $f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$ (où $n \in \mathbb{N}$ et les f_k sont des fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R}). Alors, il suffit alors de superposer les diagrammes de liaisons représentant respectivement $x \mapsto f_1(x)$, $f_1(x) \mapsto (f_2 \circ f_1)(x)$, \dots , et $(f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)(x) \mapsto (f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)(x)$. Notons que cette représentation peut devenir rapidement trop chargée si n est grand. Dans ce cas, une solution alternative est de représenter à tour de rôle chacun des diagrammes de liaisons en s'assurant de prendre comme échantillon l'image de l'échantillon du diagramme précédent. Ceci nous permet,

entre autres, de représenter aisément la composition

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$$

pour une certaine fonction f donnée et $n \in \mathbb{N}$. L'utilisation d'un logiciel comme l'application RTF peut faciliter la création d'une telle représentation. La figure 21 montre un exemple d'une telle composition pour $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ et $n = 4$. Dans cette figure, les diagrammes sont superposés afin de bien représenter le fait que l'échantillon de chaque diagramme est l'image de l'échantillon du diagramme précédent. Toutefois, dans l'application, un seul diagramme est affiché à la fois. Le dynamisme et l'interface de l'application RTF permettent de bien représenter les liens qu'il y a entre chaque diagramme.

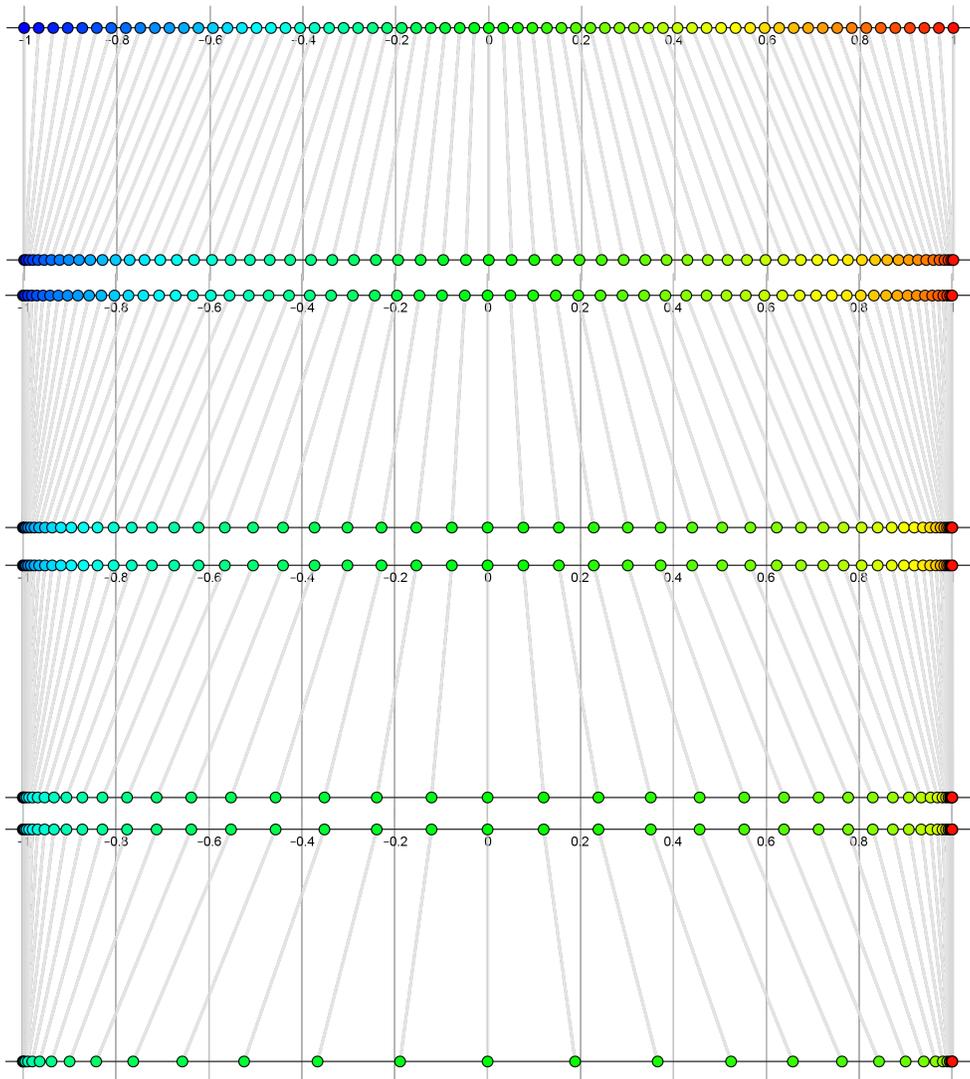


FIGURE 21 – Soit $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ définie sur $[-1, 1]$. Cette figure représente $x \mapsto f^4(x)$. Le premier diagramme de liaisons à partir du haut représente $x \mapsto f(x)$. Le deuxième représente $f(x) \mapsto f^2(x)$. Le troisième représente $f^2(x) \mapsto f^3(x)$. Finalement, le quatrième représente $f^3(x) \mapsto f^4(x)$.

4.4.2 La dérivée d'une composition de fonctions

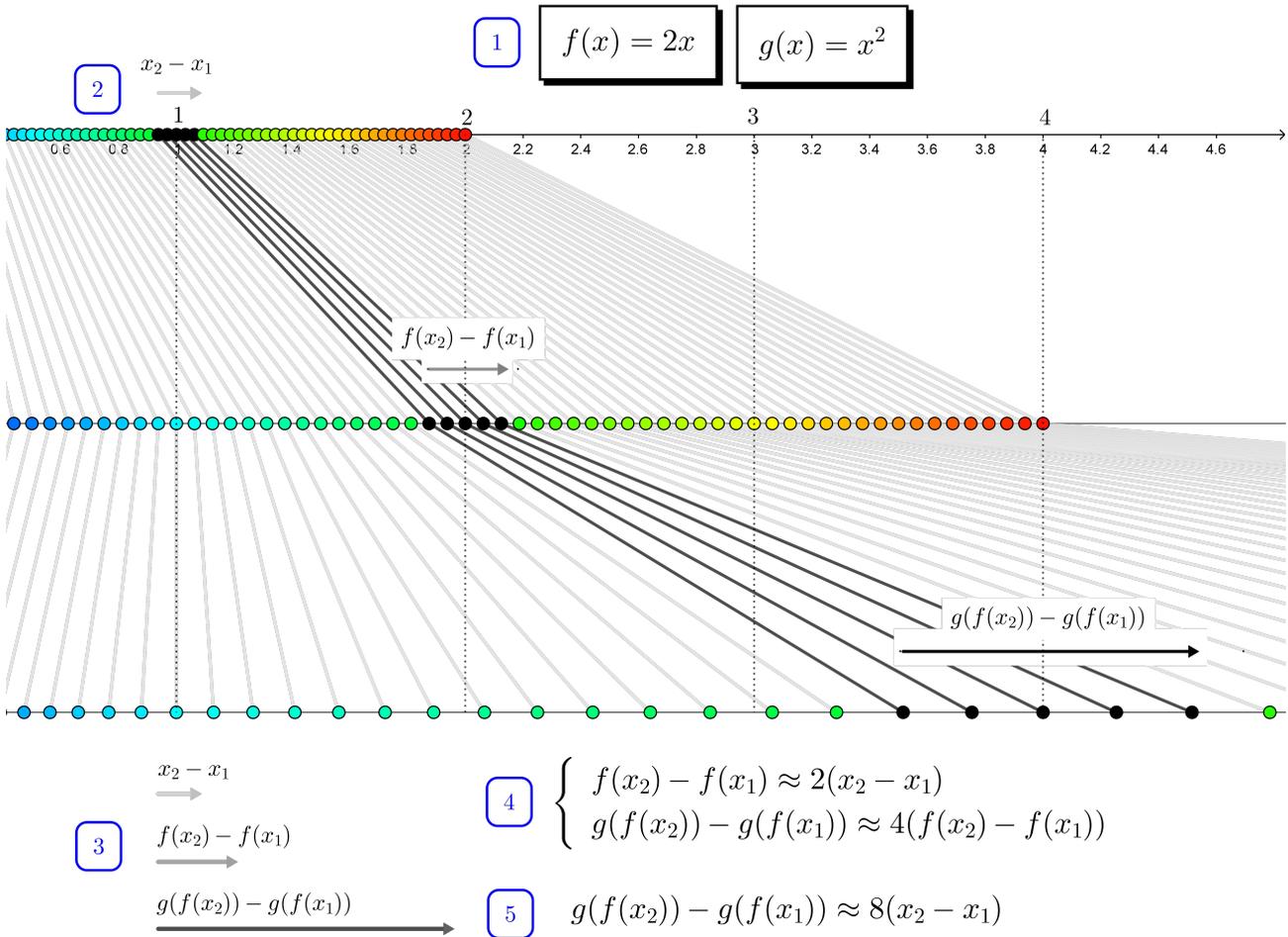


FIGURE 22 – Représentation de la fonction $g \circ f$ où $f(x) = 2x$ et $g(x) = x^2$ par diagrammes de liaisons. La figure est annotée afin de mettre en évidence l'interprétation graphique de la quantité $(g \circ f)'(1)$. Les nombres bleus proposent un ordre de lecture de l'image.

La figure 22 présente un exemple d'interprétation de la dérivée d'une composition de fonctions dans un schéma constitué de deux diagrammes de liaisons superposés. Voici une description générale de cette interprétation. D'abord, rappelons-nous que l'amplitude de la dérivée d'une fonction f en un point $c \in \mathbb{R}$ dans un diagramme de liaisons peut être interprétée comme étant le rapport entre la distance entre les points de l'image de l'échantillon près de c et la distance entre les points de l'échantillon près de c . Autrement dit, f contracte ou étend les points de l'échantillon près de c d'un facteur $|f'(c)|$ (voir les points [1](#), [2](#) et [3](#) de la figure 22). Maintenant, introduisons une certaine fonction g . De la même façon, pour tout $x \in \mathbb{R}$, g contracte ou étend les points de l'échantillon près de x d'un facteur $|g'(x)|$. En particulier, pour $x = f(c)$, g contracte ou étend les points près de $f(c)$ d'un facteur $|g'(f(c))|$ (voir les points [3](#) et [4](#) de la figure 22).

Que peut-on dire de la dérivée de $g \circ f$ en c ? D'abord, par continuité, f envoie les points du voisinage de c dans le voisinage de $f(c)$. La distance entre les points du voisinage de $f(c)$ est $|f'(c)|$ fois plus grande que dans le voisinage de c . Ensuite, par continuité, g envoie les points du voisinage de $f(c)$ dans le voisinage de $g(f(c))$. La distance entre les points du voisinage de $g(f(c))$ est $|g'(f(c))|$ fois plus grande que dans le voisinage de $f(c)$.

On a d'abord contracté ou étendu les points d'un facteur $|f'(c)|$ et ensuite d'un facteur $|g'(f(c))|$. Ainsi, $g \circ f$ contracte ou étend les points du voisinage de c d'un facteur $|g'(f(c))| \cdot |f'(c)|$ (voir le point [5](#) de la figure 22). Ceci nous permet donc de conclure que $|(g \circ f)'(c)| = |g'(f(c))f'(c)|$.

Pour déterminer le signe de $(g \circ f)'(c)$, il suffit de se rappeler qu'une dérivée négative signifie que la fonction inverse localement l'ordre des points. Donc si ni f ni g inverse l'ordre des points situés près de c et $f(c)$ respectivement ($f'(c), g'(f(c)) > 0$) ou si f et g inversent tous les deux l'ordre de ces points ($f'(c), g'(f(c)) < 0$), alors $g \circ f$ n'inverse pas l'ordre des points. Sinon, si seulement une de ces fonctions inverse l'ordre des points, $g \circ f$ inverse l'ordre des points près de c . On peut donc écrire que $(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c)$.

Utilisons la méthode d'interprétation précédente afin de décrire plus précisément la figure 22. D'abord, au point [1](#) on introduit les fonctions $f(x) = 2x$ et $g(x) = x^2$. Au point [2](#), on présente les diagrammes de liaisons superposés. Les flèches grises permettent d'identifier la variation du domaine et les variations résultantes pour f et $g \circ f$. Elles sont aussi un indicateur pour la distance entre les points. Le point [3](#) montre une comparaison des variations. De cela, on en déduit les informations au point [4](#). f double la distance entre les points qui se situent près de 1 et g quadruple la distance entre les points qui se situent près de $2 = f(1)$. En conclusion, au point [5](#), on note que $g \circ f$ multiplie par $8 = 2 \cdot 4$ la distance entre les points près de 1. Donc $(g \circ f)'(1) = 8$.

Notons que cette interprétation de la dérivée d'une composition de fonctions peut s'appliquer à la composition de n fonctions. Localement, chaque fonction contracte ou étend les points d'un certain facteur et inverse ou non l'ordre. Donc pour des fonctions f_k , on a que

$$(f_n \circ \dots \circ f_1)'(c) = f_n'((f_{n-1} \circ \dots \circ f_1)(c)) \cdot f_{n-1}'((f_{n-2} \circ \dots \circ f_1)(c)) \cdot \dots \cdot f_1'(c) .$$

4.5 Les points fixes

Le diagramme de liaisons permet de rendre apparents les points fixes d'une fonction. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$ un point fixe d'une fonction f , on a, par définition, que $f(x) = x$. Donc le segment qui relie x à son image est vertical. Ainsi, dans un diagramme de liaisons, pour déterminer les points fixes d'une fonction sur un certain intervalle du domaine, il suffit de cibler les points de l'échantillon étant reliés à leur image par un segment vertical.

Tel que Grant Sanderson le dit dans sa vidéo [\[32\]](#), le diagramme de liaisons d'une fonction permet aussi de déduire si un point fixe est attractif ou non. Rappelons-nous qu'un point fixe c d'une fonction f est attractif (ou stable) s'il existe un voisinage $B_r(c) := \{x \in \mathbb{R} : |x - c| < r\}$ de c tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = f(c)$ pour tout $x \in B_r(c)$. Si la distance entre les points de l'image du voisinage d'un point fixe est plus petite que la distance entre les points du voisinage de ce

point fixe, on dit que f rapproche les points situés près de c . Donc si f rapproche les points situés près de c et que $f(c) = c$, on peut déduire que $f \circ f$ rapproche aussi les points situés près de c . De façon générale, appliquer la fonction f à elle-même à répétition rapproche les points situés près de c de plus en plus. Si f réduit la distance entre les points, disons, à la moitié, alors f^2 la réduit au quart, f^3 au huitième, f^4 au seizième, etc. Or, on sait que $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ pour $|r| < 1$. Donc, la distance entre les points tend vers 0. Autrement dit, ces points tendent vers le point c . Donc c est un point fixe attractif de f . Le fait que f rapproche les points près de c signifie que $|f'(c)| < 1$. Ainsi, on peut déduire que si $|f'(c)| < 1$, alors c est un point fixe attractif.

Le diagramme de liaisons permet aussi d'identifier clairement un sous-ensemble du bassin d'attraction d'un point fixe. Le bassin d'attraction d'un point fixe c est l'union de tous les ensembles $E \subseteq \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in E$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = f(c)$. Supposons que la fonction f représentée est continue et que c est un point fixe attractif. Il suffit de trouver les points $a < c < b$ les plus près de c tels que $a \geq f(a)$ et $b \leq f(b)$. Ceux-ci sont facilement identifiables puisque les segments associés à ceux-ci montrent que f n'envoie pas a et b plus près de c . Autrement dit, l'angle de ces segments n'est pas en direction de $f(c)$. De cela, on peut déduire que l'intervalle (a, b) fait partie du bassin d'attraction de c . En effet, f envoie tous les points de cet intervalle plus près de c .

Il est aussi possible de déterminer les points fixes répulsifs (instables). Autour d'un tel point fixe, disons c , il existe un voisinage $B_r(c)$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) \notin B_r(c)$ pour tout $x \in B_r(c) \setminus \{c\}$. On peut utiliser un argument semblable au précédent pour conclure que si f augmente la distance entre les points près de c (donc si $|f'(c)| > 1$), alors c est répulsif.

4.6 Exemple d'interprétation d'un diagramme de liaisons

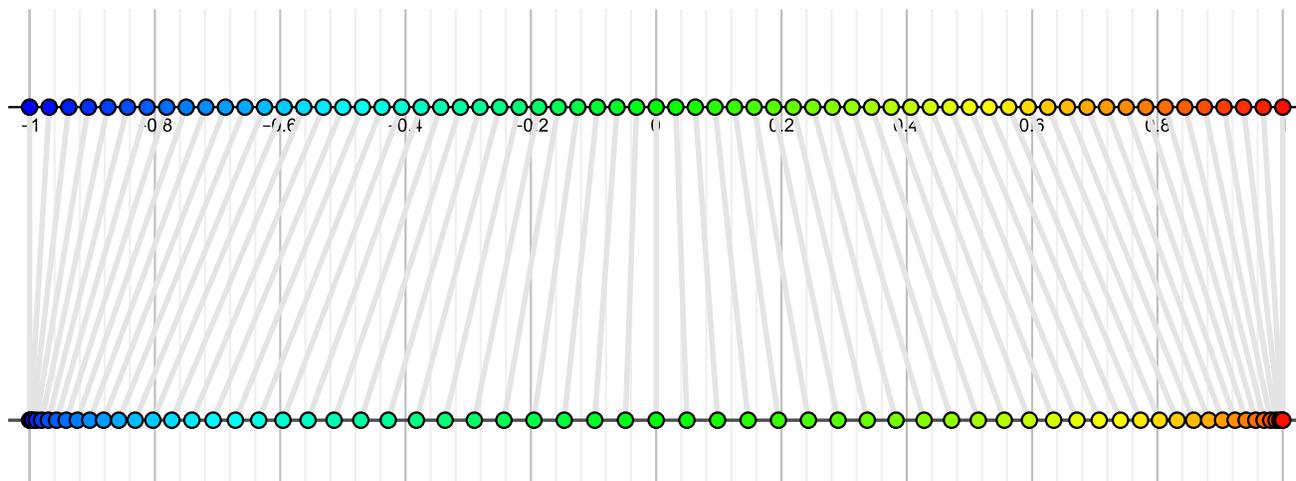


FIGURE 23 – Diagramme de liaisons de la fonction $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ sur $[-1, 1]$.

Utilisons le diagramme de liaisons de la figure 23 afin d'analyser certaines caractéristiques de la fonction $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ sur $[-1, 1]$. D'abord, puisque les segments reliant chaque point à son image ne s'intersectent pas, on déduit que l'ordre des points dans l'échantillon est le même que l'ordre de l'image de ces points. Les points de l'échantillon et leur image respective sont colorés selon un dégradé de couleurs afin de renforcer cette idée. Puisque l'ordre des points dans l'image est

le même que dans la préimage, on en déduit que la fonction est croissante. En effet, l'ordre est conservé, donc un accroissement dans le domaine implique un accroissement dans l'image.

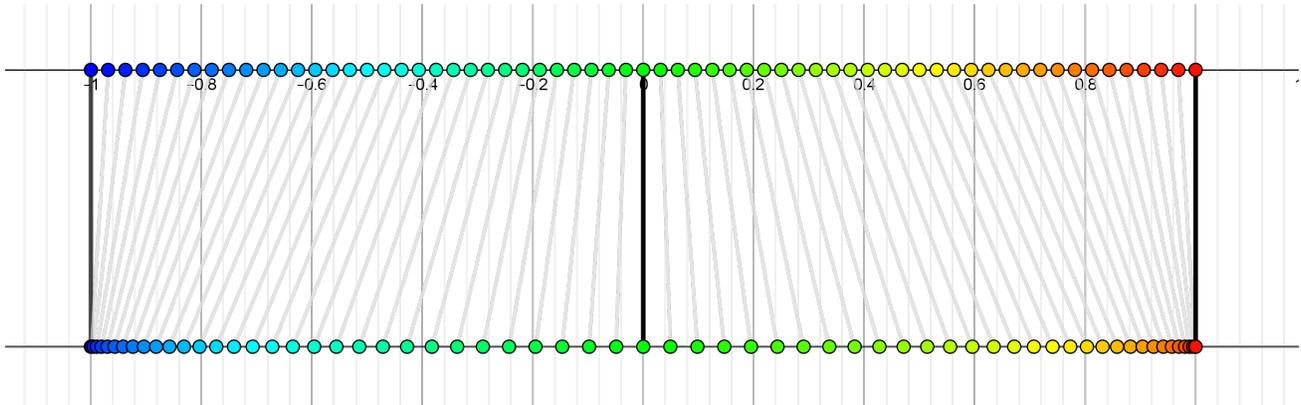


FIGURE 24 – Les segments verticaux du diagramme de liaisons permettent de déterminer les points fixes de la fonction. Ceux-ci sont noircis dans cette image afin de mieux les reconnaître.

Ensuite, le diagramme met en évidence trois points fixes : -1 , 0 et 1 . En effet, les segments verticaux reliés à ces points montrent que ces points coïncident avec leur image respective (voir la figure 24). Les points de l'échantillon dans le voisinage de -1 sont reliés à des points très près de 1 . Les points de l'image semblent se contracter en seul point. Donc une variation dans le domaine près de -1 résulte en une variation quasiment nulle dans l'image. La dérivée en -1 est donc approximativement nulle. Le même raisonnement est valide en 1 . Voyant que les points voisins à ces valeurs sont envoyés très près du point fixe respectif, on peut déduire que ces points fixes sont attractifs. La figure 25 met en lumière ces propriétés.

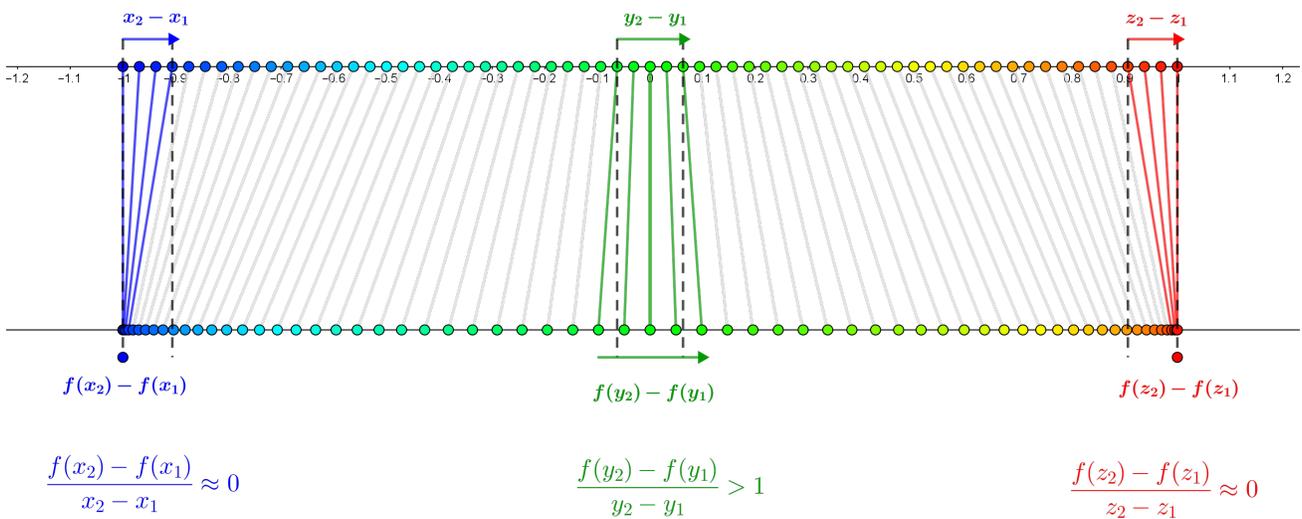


FIGURE 25 – Variation de l'image selon une variation du domaine près des points fixes de la fonction $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ sur $[-1, 1]$.

De plus, la distance entre les points de l'image du voisinage de 0 semble être supérieure à la distance entre les points du voisinage du 0. Les points de l'image semblent se disperser ou s'éloigner les uns des autres. Ainsi, une variation dans le voisinage de 0 entraîne une variation supérieure dans l'image. Donc la dérivée en 0 est plus grande que 1. De plus, on voit que l'image des points près de 0 semblent se distancer de la valeur 0. Ainsi, 0 est un point fixe répulsif. La figure 25 met en lumière ces propriétés.

On peut aussi observer dans l'image de l'échantillon sur l'intervalle $[-1, 1]$ que la distance entre les points augmente entre -1 et 0 et diminue entre 0 et 1 . Ainsi, une variation dans le domaine résulte en une variation de plus en plus grande lorsqu'on se déplace de -1 à 0 . À l'inverse, une variation dans le domaine résulte en une variation de plus en plus petite lorsqu'on se déplace de 0 à 1 . Ainsi, la dérivée seconde est positive sur $[-1, 0]$ et négative sur $[0, 1]$.

Finalement, grâce à l'angle formé par les segments, on peut déduire que le bassin d'attraction du point fixe -1 est l'intervalle $[-1, 0)$ et que le bassin d'attraction du point fixe 1 est l'intervalle $(0, 1]$. La figure 21 présente quelques compositions de f avec elle-même. De cela, on peut déduire que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1, 0) \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \in (0, 1] \end{cases} \quad (8)$$

5 Discussion

5.1 Représentations de la fonction et conceptions

Dans leur article, Marilyn Carlson et Michael Oehrtman écrivent qu'ils « plaident pour qu'on accorde une plus grande importance au développement de l'habileté des étudiants à parler de fonctions comme des entités qui acceptent une donnée entrante et produisent une donnée sortante. » Selon eux, il s'agit d'une « orientation plus conceptuelle pour enseigner l'inverse et la composition de fonctions. » [2]

Dans ce même article, on compare la conception de la fonction vue comme un processus et la fonction vue comme une action. Pour un sujet ayant une conception de la fonction vue comme une action, celle-ci est vue comme un objet statique liée à une règle spécifique, une formule ou un calcul et demande l'achèvement d'étapes précises. Le graphe de la fonction correspond à une figure géométrique. Pour un sujet ayant une conception de la fonction vue comme un processus, celle-ci est vue comme un objet dynamique qui correspond à un processus généralisé d'entrée-sortie. Dans ce contexte, le graphe définit un ensemble de liaisons (*mapping*) des données entrantes aux données sortantes. On explique que les étudiants doivent passer d'une vue de la fonction comme une action à une vue de la fonction comme un processus.

Le diagramme de liaisons, et plus particulièrement sa version implémentée dans l'application RTF, est une représentation de la fonction qui permet le renforcement d'une conception *entrée-sortie* de la fonction ou encore d'une vue de la fonction en tant que processus (voir

l'introduction du dynagraphe par Steketee, 2012 p.263-264 [33]). D'abord, en déplaçant dynamiquement les points du domaine (une droite horizontale) vers leur image (une droite parallèle au domaine), on rend apparente et claire l'idée de *transformation dynamique* de la fonction vue comme un processus. Les curseurs « x » et « $f(x)$ » permettent de représenter la relation dynamique qu'il y a entre la variable indépendante et la variable dépendante. De plus, les segments reliant chaque point de l'échantillon à leur image respective sont en soi une représentation explicite d'un sous-ensemble des liaisons des données entrantes aux données sortantes. En offrant cette représentation de la fonction, différente de celle qui utilise le plan cartésien, je pense que cela peut aider à diviser conceptuellement la fonction de son graphe.

En conclusion, je pense que l'utilisation de cette représentation de la fonction, tant aux niveaux secondaires, collégiaux ou universitaires, pourrait permettre d'atteindre une conception plus robuste de la fonction.

5.2 Conception de la dérivée

La représentation de la dérivée comme étant la pente de la droite tangente à la courbe décrite par le graphe est la représentation la plus utilisée avec la représentation symbolique dans le cours de calcul différentiel au cégep. Deux des cinq éléments de compétence de la compétence 00UN ciblée par le cours traitent explicitement de cette représentation [7] :

1. Reconnaître et décrire les caractéristiques d'une fonction représentée sous forme d'expression symbolique ou sous forme graphique.

4. Utiliser la dérivée et les notions connexes pour analyser les variations d'une fonction et tracer son graphique.

Bien que les liens entre la droite tangente et la dérivée de fonctions ajoutent une richesse importante aux représentations, ces deux concepts peuvent aussi exister indépendamment l'un de l'autre. Par exemple, la droite tangente peut être interprétée comme un lieu géométrique qu'on obtient pour une courbe donnée assez régulière du plan et un point particulier de celle-ci. Dans cette interprétation, la courbe en question n'est pas nécessairement décrite par le graphe d'une fonction. Il s'agit avant tout d'une figure géométrique. La tangente, quant à elle, ne représente pas nécessairement une application affine. Elle peut être interprétée comme étant une droite particulière du plan. La pente de la tangente, dans ce contexte, pourrait être davantage une mesure de l'orientation de la droite dans le plan selon certains repères. Cela pourrait aussi être associé à l'angle que la droite forme selon un autre objet géométrique.

La dérivée d'une fonction en un certain point, quant à elle, peut être interprétée comme la limite d'un rapport de variations (ou taux de variation moyen). Dans cette interprétation, la notion de variation peut exister sans avoir recours à la courbe décrite par le graphe de la fonction. La variation pourrait simplement faire référence à la différence entre une certaine quantité donnée et une autre quantité. On appelle généralement cette conception de la dérivée *le taux de variation instantané*.

Je pense qu'une partie des compétences requises pour être en mesure d'interpréter et de

manipuler les différentes représentations de la dérivée repose dans la connaissance des liens qu'il y a entre les représentations. De plus, je crois qu'il faut aussi être en mesure de connaître ce qui distingue chacune des représentations. Des recherches (Dorko, 2013 [9] et Teuscher, 2010 [36]) démontrent que les étudiants éprouvent des difficultés à faire la différence entre la pente et le taux de variation instantané. Selon la recherche d'Allison Dorko [9], plusieurs étudiants interprètent le taux de variation instantané comme étant la pente de la courbe décrite par le graphe en un point. Ces étudiants ont une conception de la dérivée qui « ignore le processus de limite lorsqu'on mesure le taux de variation et qui ne se concentre pas sur la mesure de quantités qui permettent de déterminer à quel point l'une des variables change rapidement par rapport à l'autre ». D'ailleurs, dans la définition 7 de la dérivée offerte par le manuel *Calcul différentiel* de Josée Hamel, on indique que le taux de variation instantané « est » la pente de la tangente. Selon les recherches précédemment mentionnées, cette définition pourrait être un obstacle à une interprétation adéquate des différentes représentations de la dérivée (la pente de la droite tangente et le taux de variation instantané).

Le diagramme de liaisons offre sa propre représentation de la dérivée. Dans ce contexte, la dérivée est une mesure signée de la dispersion des points de l'image. Je pense toutefois que cette représentation est semblable au concept de taux de variation. Du moins, je pense que le diagramme de liaisons permet de représenter plus explicitement le concept de taux de variation que la représentation graphique de la fonction. Dans le diagramme de liaisons, la distance entre les points de l'image de l'échantillon représente les variations de l'image. La distance entre les points du domaine permet de comparer les variations de l'image avec les variations du domaine. Cette notion de variation est encore plus apparente avec l'utilisation des curseurs « x » et « $f(x)$ » dans l'application RTF. En déplaçant le curseur « x » dans le voisinage d'un certain point c , on peut comparer la vitesse de ce curseur avec la vitesse du curseur « $f(x)$ ». Le diagramme de liaisons pourrait aussi permettre d'éviter une conception de la dérivée vue comme la pente de la droite tangente. Il pourrait ainsi être utilisé efficacement pour traiter la dérivée vue comme un taux de variation sans trop risquer de mélanger cette conception avec la pente de la droite tangente.

5.3 La composition de fonctions

5.3.1 La représentation de la composition de fonctions

Le plan cartésien n'est pas une représentation claire et accessible pour la composition de fonctions (Sketete, 2012 [33]). D'abord, la donnée sortante de la première fonction doit servir de donnée entrante pour la deuxième fonction. « Ce transfert de valeurs d'un axe à l'autre n'est ni familier ni intuitif » [33]. De plus, dans le cas où on souhaiterait utiliser le plan cartésien pour représenter la composition de fonctions, il faudrait non seulement pouvoir représenter les deux fonctions et leur composition, mais il faudrait aussi représenter les liens qu'il y a entre eux. Or, il n'y a généralement pas de façon directe de faire cela.

Le diagramme de liaisons, quant à lui, peut être utilisé directement pour représenter la composition de fonctions. En fait, il peut même servir à représenter la composition d'un nombre fini de fonctions (voir la section 4.4.1). D'après mon expérience personnelle, je pense que l'accessibilité à la composition qu'offre le diagramme de liaisons permet d'accorder plus d'importance à cette

notion. Cette représentation pourrait influencer les apprentissages et les découvertes afin d'offrir un plus grand rôle à la composition. Ceci pourrait être bénéfique dans certains domaines où la composition de fonctions est fondamentale (algèbre linéaire, analyse numérique, optimisation, etc.).

5.3.2 La dérivée d'une composition de fonctions dans les manuels du cégep

Quelle intuition les manuels du collégial donnent-ils aux étudiants pour comprendre la dérivée d'une composition de fonctions ?

Commençons par résumer l'approche offerte dans le livre *Calcul différentiel* de Josée Hamel et Luc Amyotte [15]. Avant de s'attarder à la dérivée d'une composition de fonction dans le cas général, on analyse le cas de la dérivée de la puissance d'une fonction. On s'attaque particulièrement à la dérivée de la puissance d'un polynôme. On indique que pour $p(x)$ un polynôme, $n \in \mathbb{N}$ et $y = (p(x))^n$, on pourrait croire que $\frac{dy}{dx} = n(p(x))^{n-1}$. Pour voir que cela ne fonctionne pas, on offre un contre-exemple. On compare ainsi les quantités $n(p)^{n-1}$ et $n(p)^{n-1} \frac{dp}{dx}$ pour obtenir la contradiction.

Pour donner suite à cet exemple, on offre une situation concrète pour déduire la règle de dérivation en chaîne. La mise en scène va comme suit. Une solution saline est déversée dans une citerne. La solution entre à un taux de 5 litres par minute et la concentration de la solution est de 10 grammes par litre. On déduit donc que la quantité de sel déversée dans la citerne est de 50 grammes par minute. De cela, on en déduit la relation $\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dV} \frac{dV}{dt}$ (où $Q(t)$ représente la quantité de sel dans la citerne au temps t et $V(t)$ le volume de liquide au temps t).

Finalement, on nous présente le théorème intitulé « Dérivation en chaîne ». Voici l'énoncé :

Si $y = f(u)$ est dérivable par rapport à u et si $u(x)$ est dérivable par rapport à x , alors y est une fonction dérivable de x , et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} .$$

Ce théorème est accompagné d'une preuve où on utilise la notion de pente de droites sécantes dans un plan où on retrouve y comme ordonnée et u comme abscisse. Ceci nous offre alors une expression qu'on manipule pour faire ressortir la pente de droites sécantes du plan où y est l'ordonnée et x l'abscisse. En évaluant la limite des droites sécantes, on est alors en mesure de déterminer la pente de la droite tangente de y en x .

Notons que le concept de taux de variation a été utilisé plutôt que le concept de pente de la droite pour présenter l'exemple précédant le théorème. De plus, notons que puisque l'exemple précédant le théorème est entièrement linéaire, on s'attarde peu au terme $f'(g(x))$ qui apparaît dans l'égalité $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$. Autrement dit, on ne met pas en lumière le fait qu'on s'intéresse à la dérivée de f évaluée en $g(x)$ dans la dérivation en chaîne.

Regardons maintenant l'approche faite dans le livre « Calcul différentiel » de James Stewart (p.233 [34]). On présente d'abord le fait qu'il est impossible de dériver la fonction $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

avec les formules introduites précédemment dans le manuel. Ceci motive donc l'introduction d'une formule de dérivation pour une fonction de la forme $y(u(x))$. On fournit ensuite une intuition qui pourrait expliquer que $(y \circ u)'(x) = y'(u(x))y'(x)$. D'abord, on indique au lecteur de considérer les dérivées comme des taux de variation. Ceci amène naturellement à étudier les quantités $\frac{dy}{dx}$, $\frac{du}{dx}$ et $\frac{dy}{du}$. On apporte ensuite l'exemple suivant : « si u varie deux fois plus vite que x et si y varie trois fois plus vite que u , il semble alors vraisemblable que y varie six fois plus vite que x , et on peut s'attendre à ce que $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$. »

Ceci est ensuite suivi du résultat intitulé « la règle de dérivation en chaîne ». Dans cet ouvrage, le résultat est énoncé comme suit :

Si g est dérivable en x et si f est dérivable en $g(x)$, alors la fonction composée $F = f \circ g$ définie par $F(x) = f(g(x))$ est dérivable en x , et F' est donnée par le produit

$$\begin{aligned} F'(x) &= (f' \circ g)(x) \cdot g'(x) \\ &= f'(g(x)) \cdot g'(x). \end{aligned}$$

En notation de Leibniz : Si les fonctions $y = f(u)$ et $u = g(x)$ sont toutes deux dérivables respectivement en u et en x , alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Notons que tout comme dans le manuel de Josée Hamel, le concept de taux de variation a été utilisé afin d'introduire l'intuition derrière la dérivée d'une composition de fonctions. De plus, dans la situation présentée, on ne précise pas explicitement la possibilité que les relations entre les variables soient non linéaires. Notons aussi qu'à la différence du livre de Hamel, le théorème présente le résultat avec plusieurs représentations symboliques de la dérivée.

5.3.3 La dérivée d'une composition de fonctions dans le diagramme de liaisons

Les exemples précédents mènent à croire que le concept de taux de variation est utilisé davantage par rapport au concept de pente de la tangente lorsqu'on traite de la dérivée d'une composition de fonctions. La dérivée vue comme étant la pente de la tangente est intimement liée à la représentation du graphe de la fonction dans le plan. Puisqu'il est difficile de représenter efficacement la composition de fonctions dans le plan, cette conception de la dérivée pourrait être difficile à interpréter dans le cadre de la dérivée d'une composition de fonctions.

Comme mentionné précédemment, le diagramme de liaisons représente davantage le concept de dérivée vue comme un taux de variation que la représentation de la fonction dans le plan. Ainsi, celui-ci pourrait s'avérer efficace pour représenter la dérivée d'une composition de fonctions.

Je dirais même que le diagramme de liaisons permet de représenter intuitivement la dérivée d'une composition de fonctions sans faire recours directement au concept de taux de variation. En interprétant la dérivée comme une mesure signée de la dispersion des points de l'image, je crois que la règle de dérivation en chaîne devient immédiate. En plus, tel que l'exemple de la section 4.4.2 le démontre, cette représentation permet de traiter aisément des cas non linéaires.

Je pense que cela permet entre autres de voir et de comprendre davantage pourquoi le terme $f(x)$ apparaît en argument de la fonction g' dans l'égalité $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

5.4 Les points fixes

Le diagramme de liaisons permet de rendre apparents les points fixes. De plus, il rend naturelle et accessible l'analyse de compositions de fonctions. En effet, une conception de la fonction vue comme un processus peut aider l'étude de la composition de fonctions [2]. De ce fait, cette représentation peut être grandement utile à l'étude de la nature des points fixes. Pour c un point fixe de f , cette représentation permet de comprendre pourquoi $|f'(c)| < 1$ entraîne que c est un point fixe attractif. On peut aussi voir ce que la fonction fait aux points du voisinage du point fixe et déduire le comportement de la composition de la fonction. La représentation de la fonction par diagramme de liaisons suffit pour avoir une idée de la nature d'un point fixe.

Tel que mentionné par Grant Sanderson [32], il existe un moyen couramment utilisé pour représenter l'évaluation d'une valeur spécifique de la composition d'une fonction avec elle-même dans le plan cartésien (voir, par exemple, Fortin 2015 [14]). Supposons qu'on souhaite connaître la valeur de $f^n(x)$. D'abord, on représente la fonction et la droite $D(x) = x$ dans un même plan et on dessine le point $(x, 0)$. On pose $P_1 = (x, 0)$. Ensuite, on répète l'opération suivante n fois. On trace un segment vertical allant du point P_1 jusqu'à la courbe décrite par le graphe de f . On définit P_2 comme étant l'intersection du segment avec la courbe. On trace un segment horizontal allant du point P_2 jusqu'à la droite définie par le graphe de D . On définit P_1 comme étant l'intersection du segment avec la droite.

La coordonnée verticale du point P_2 après avoir répété n fois l'opération précédente correspond à $f^n(x)$. La figure 26 montre un exemple de cette représentation.

On utilise parfois cette représentation pour obtenir et déduire de l'information sur la nature de certains points fixes. Par exemple, la figure 26 semble indiquer que le point fixe $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est un point fixe attractif. En effet, la valeur de $f^n(x)$ semble s'approcher du point fixe lorsque n augmente.

Ce raisonnement est justifié par le fait que si f est une fonction dérivable au voisinage d'un point fixe c et qu'on est en mesure de démontrer que $f^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$ pour un certain x fixé, cela suffit pour conclure que ce point fixe est attractif. Donc, à priori, pour les fonctions dérivables, cette représentation peut fonctionner pour obtenir une idée de la nature d'un point fixe. Cependant, cette déduction se base sur un résultat qui n'est pas nécessairement intuitif et qui pourrait demander une démonstration. Rappelons-nous qu'un point fixe est dit attractif s'il existe un voisinage V du point fixe tel que $f^n(v)$ tend vers le point fixe pour tout $v \in V$. Le résultat mentionné précédemment nous indique que si f est dérivable sur le voisinage et si $f^n(x)$ converge vers c pour un seul point x , cela suffit pour conclure que c est un point fixe attractif.

Comme Grant Sanderson l'indique, cette représentation pourrait demander un travail ou une réflexion non négligeable pour la produire directement à partir du graphe d'une fonction représenté dans le plan. À chaque étape donnée, il faut savoir quels points relier.

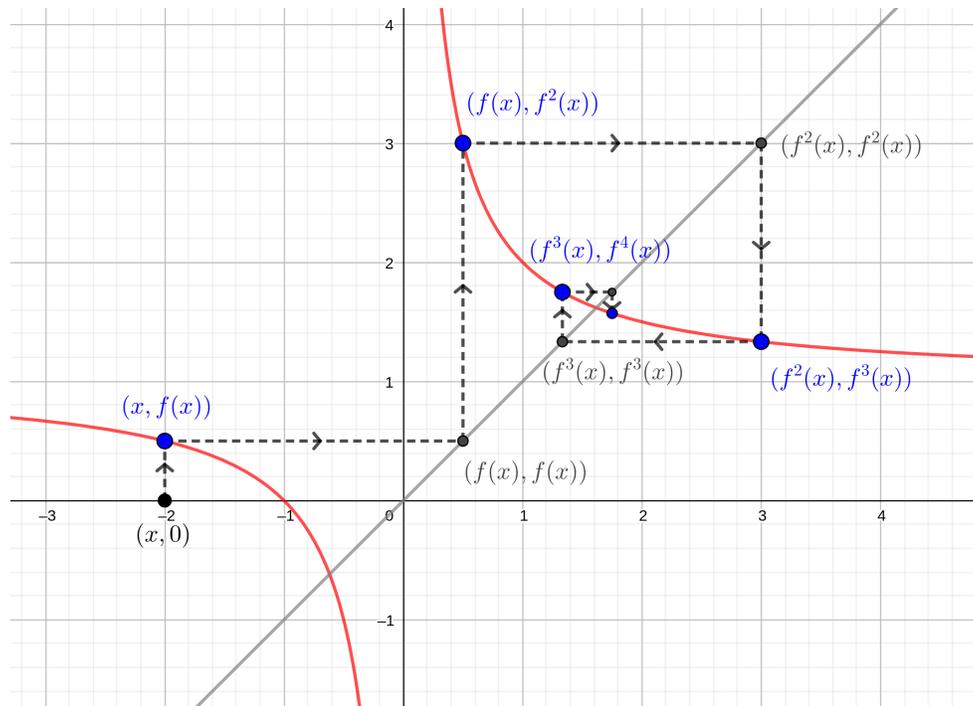


FIGURE 26 – Représentation de l'évaluation de la composition d'une fonction f avec elle-même en un point x donné dans le plan cartésien. Ici, $f(t) := \frac{1}{t} + 1$ et $x := -2$.

Le diagramme de liaisons, quant à lui, permet d'obtenir une idée de l'image du voisinage complet d'un point fixe par rapport à la composition de la fonction avec elle-même. La représentation ne se limite pas à l'évaluation d'un seul point du domaine. Je crois que cela rend plus intuitive l'interprétation de la nature des points fixes. Il n'est pas nécessaire de faire appel à des résultats théoriques relativement complexes. De plus, la représentation est directe. Il n'est pas nécessaire d'ajouter quoi que ce soit au diagramme de liaisons pour déduire des informations quant à la nature d'un point fixe. Il est même possible, grâce au diagramme de liaisons, de déduire certains sous-ensembles du bassin d'attraction d'un point fixe. En effet, en observant l'intervalle des points près du point fixe qui sont envoyés encore plus près du point fixe, on peut obtenir une idée d'un sous-ensemble du bassin d'attraction du point fixe.

5.5 Les fonctions à plusieurs variables

5.5.1 Les conceptions et les représentations

Lorsqu'on a une conception de la fonction vue comme une action [2], le graphe correspond d'abord et avant tout à un lieu géométrique. Le graphe d'une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} correspond à une courbe dans le plan. Le graphe d'une fonction de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} correspond à la description d'une surface dans l'espace. Finalement, le graphe d'une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^2 correspond à une courbe de l'espace. De manière plus générale, une fonction de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^m peut être vue comme un moyen de représenter un lieu géométrique dans un espace de $n+m$ dimensions. Il n'est toutefois pas évident de représenter un lieu géométrique d'un espace de plus de 3 dimensions. Une façon d'y arriver est de projeter le lieu géométrique dans un espace de dimension plus petit ou égal à 3. Or, beaucoup d'information peut se perdre dans cette projection. Cette conception

de la fonction et de son graphe pourrait ainsi limiter la compréhension des fonctions de plusieurs variables réelles.

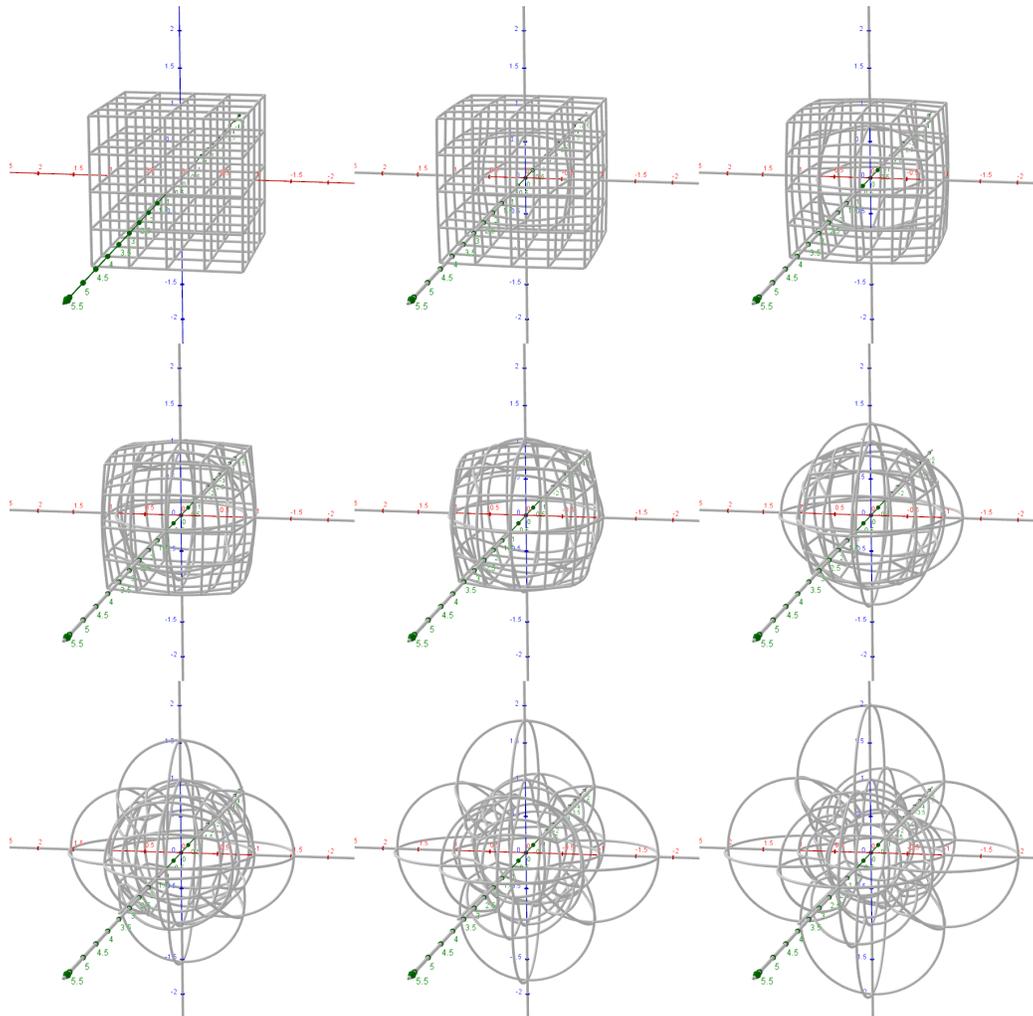


FIGURE 27 – Étapes de la transformation entre l'échantillon et son image avec la fonction $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \right)$ dans $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$. L'échantillon choisi est un grillage de segments également distancés et orientés selon la base canonique de l'espace.

Lorsqu'on a une conception de la fonction vue comme un processus, une fonction à plusieurs variables réelles pourrait être vue comme une entité qui accepte une (ou des) donnée(s) entrante(s) et qui fournit une (ou des) donnée(s) sortante(s). Ceci implique une transformation dynamique des objets de l'espace de départ vers des objets de l'espace d'arrivée. Il existe plusieurs façons de généraliser le diagramme de liaisons pour obtenir des représentations de fonctions à plusieurs variables basées sur cette conception de la fonction. Une façon de faire, semblable au diagramme de liaisons implémenté dans l'application RTF, est de choisir un échantillon de l'espace de départ et de transformer dynamiquement cet échantillon vers son image dans l'espace d'arrivée. Notons qu'il est parfois plus commode de ne pas représenter les liaisons entre l'échantillon et son image. On se contente plutôt d'utiliser le dynamisme de la transformation pour représenter les liens que la fonction définit entre l'échantillon et son image. La figure 27

présente une séquence d'images qui montre le dynamisme de la représentation.

Si on souhaite représenter adéquatement les objets du domaine et du codomaine, on doit limiter le nombre de dimensions de ces espaces à au plus 3. Sinon, il est possible d'utiliser des projections pour représenter des fonctions à plus de 3 variables. Notons que cette représentation est plus permissive au niveau des dimensions que celle déduite de la conception de la fonction vue comme une action. Elle permet, entre autres, de représenter efficacement des fonctions de \mathbb{C} vers \mathbb{C} .

5.5.2 La dérivée d'une fonction à plusieurs variables

Une façon de généraliser le concept de dérivée vue comme la pente de la droite tangente à des fonctions de plusieurs variables est d'utiliser des plans tangents. Cela peut permettre de décrire le comportement local de courbes et de surfaces de l'espace. Cela peut aussi permettre d'expliquer certaines composantes de la matrice A (communément appelée matrice jacobienne) présente dans la définition 5 de la dérivée d'une fonction à plusieurs variables. Cependant, je pense que le concept de tangence pour des objets géométriques de plus de 3 dimensions n'est pas intuitif et que cela peut donc mener à des obstacles pour l'utilisation du concept de dérivée dans des contextes plus généraux.

Le concept de dérivée vue comme une mesure de dispersion des points de l'image pourrait se généraliser plus efficacement aux fonctions de plusieurs variables. Telle que mentionnée dans la définition 5, la dérivée ou la matrice jacobienne A d'une fonction f en un point x donné est une transformation linéaire. Cette transformation peut être interprétée comme une mesure de dispersion des points de l'image dans le voisinage de x . Rappelons-nous que dans le diagramme de liaisons, la mesure de dispersion prenait en compte l'orientation des points de l'image. C'est ce qui a permis de justifier le signe de la mesure. Toutefois, en plusieurs variables, pour une composante donnée, l'orientation des points ne se limite pas à deux directions, on peut avoir une infinité de directions qui dépend de l'espace d'arrivée. On utilise donc des vecteurs pour mesurer la dispersion des points de l'image. La norme du vecteur indique à quelle échelle les points du voisinage dans la composante donnée s'étendent ou se contractent dans l'image de cette composante alors que la direction du vecteur indique l'orientation de cette dispersion. Ainsi, à chaque composante de x , on peut associer un vecteur qui mesure la dispersion des points de l'image pour cette composante particulière. Chacun de ces vecteurs correspond à une colonne de la matrice jacobienne. Ils permettent donc de définir entièrement la transformation linéaire qui approxime le comportement de la fonction près du point x .

Voici un exemple d'interprétation de cette conception de la dérivée dans une représentation transformationnelle d'une fonction de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 . Prenons la fonction

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{x + \sin(x+y)}{2} \\ y - \frac{x}{4} \end{bmatrix}$$

définie sur $[-2, 2] \times [-2, 2]$. La figure 28 présente la représentation transformationnelle de la fonction. L'échantillon choisi est un grillage de segments également distancés et engendrés par la base canonique. Supposons qu'on souhaite connaître la dérivée (la matrice jacobienne) de cette fonction en $(0, 0)$. D'abord, on doit se concentrer sur le comportement local de la fonction près

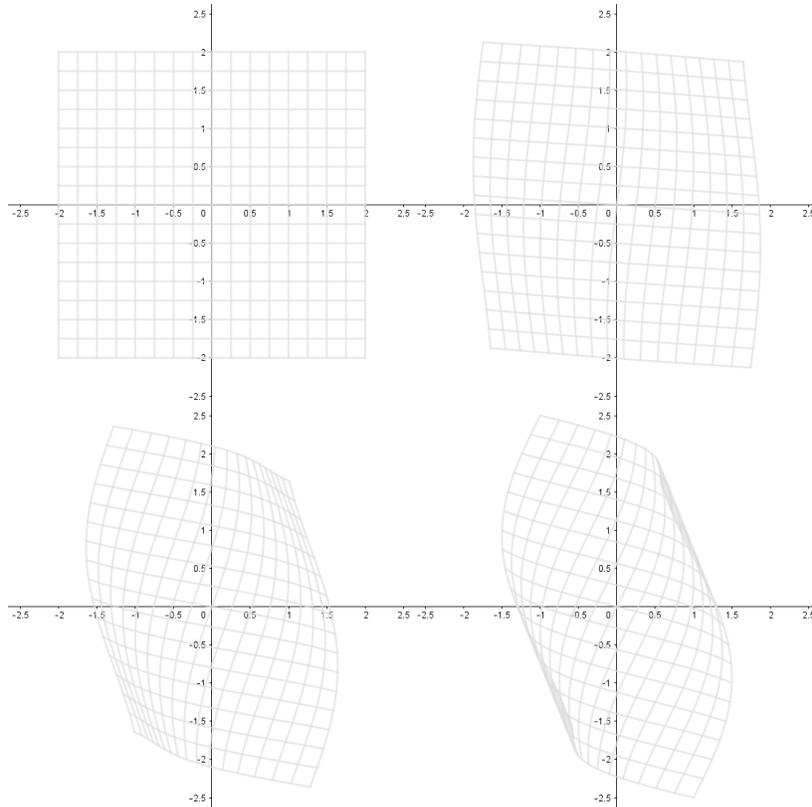


FIGURE 28 – Représentation transformationnelle de la fonction $(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin(x+y), y - \frac{x}{4})$ sur $[-2, 2] \times [-2, 2]$. Les figures, dans le sens de lecture, présentent l'évolution linéaire entre l'échantillon et son image. La première figure représente l'échantillon. Il s'agit d'un grillage de segments également distancés compris dans le carré $[-2, 2] \times [-2, 2]$. La dernière figure représente l'image de ces segments. La deuxième et la troisième figure représentent des étapes intermédiaires lors de la transformation dynamique des segments vers leur image.

de $(0, 0)$. En s'approchant de ce point et de son image et en notant les vecteurs de la base et leur image, on obtient la figure 29. Comme on peut le remarquer, dans le voisinage de $(0, 0)$, f agit comme une transformation linéaire du plan. Ceci s'explique par le fait que f est dérivable. La transformation linéaire du plan représentée près de $(0, 0)$ est exactement la transformation que décrit la matrice jacobienne de f en $(0, 0)$:

$$Df(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

La direction du vecteur en vert dans la figure de droite est celle qui résulte d'une variation dans la direction du vecteur en vert dans la figure de gauche (une variation positive sur l'axe des x). La direction du vecteur en rouge dans la figure de droite est celle qui résulte d'une variation dans la direction du vecteur en rouge dans la figure de gauche (une variation positive sur l'axe des y). La longueur de ces vecteurs permet de mesurer la dispersion des points de l'image dans ces directions. Puisque la longueur de l'image des vecteurs rouges et verts est plus grande que leur préimage respective, on en déduit que l'amplitude des dérivées partielles en x et en y est plus grande que 1. Le vecteur vert de la figure de droite représente, à un multiple près, le vecteur de la première colonne de la matrice $Df(0, 0)$. Le vecteur rouge de la figure de droite représente,

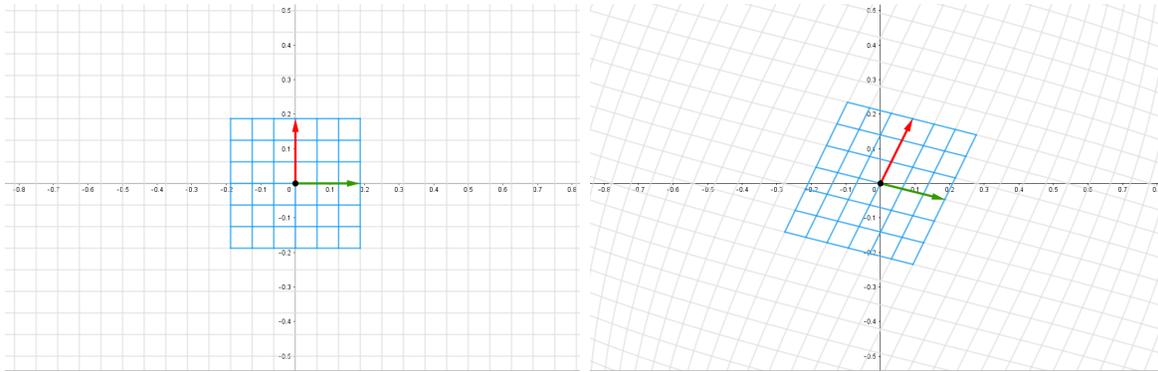


FIGURE 29 – Représentation transformationnelle de la fonction $(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin(x+y), y - \frac{x}{4})$ près de $(0,0)$. Les segments locaux ainsi que les vecteurs de la base canoniques et leur image ont été mis en évidence. La figure de gauche représente l'échantillon de courbes du domaine choisi près de $(0,0)$. La figure de droite représente l'image de cet échantillon.

à même multiple près, le vecteur de la deuxième colonne de la matrice $Df(0,0)$. Ce *multiple* est plus précisément la longueur de la préimage de ces vecteurs.

Pour résumer, je pense que les représentations transformationnelles de la fonction et de sa dérivée pourraient être plus intuitivement généralisables à des fonctions de plusieurs variables que les représentations basées sur une conception de la fonction vue comme un outil de description de lieux géométriques. Ceci pourrait donc permettre une meilleure accessibilité aux concepts avancés vus dans certains cours universitaires, notamment en mathématiques, sciences et génie.

6 Conclusion

Les technologies d'aujourd'hui nous permettent de développer de nouvelles représentations pour les fonctions. Dans la chaîne YouTube 3Blue1Brown, on utilise des représentations dynamiques faites par ordinateur pour produire des vidéos qui ont comme objectif de revoir, vulgariser ou découvrir des concepts mathématiques. Entre autres, on présente le diagramme de liaisons dans la vidéo *What they won't teach you in calculus* [32]. L'application RTF a été créée afin de permettre la génération automatique de diagrammes de liaisons pour des fonctions données. Ceci permet de rendre accessible et efficace cette représentation.

L'utilisation du diagramme de liaisons dès le secondaire pourrait aider à développer une conception de la fonction vue comme un processus (telle que décrite par Dubinsky and Harel (1992) [11]) [33]. Ceci pourrait permettre aux étudiants de mieux comprendre la composition de fonctions [2]. De plus, cette représentation pourrait amener une conception de la fonction qui aurait l'avantage d'être réutilisée pour l'apprentissage de concepts plus avancés (niveaux collégiaux et universitaires). Entre autres, cette représentation apporte une nouvelle conception de la dérivée qui s'apparente au taux de variation instantané. La dérivée est, dans ce contexte, une mesure signée de la dispersion des points de l'image. Grâce à cela, on pourrait être en mesure de déduire naturellement la règle de dérivation en chaîne. Ceci pourrait aussi permettre de comprendre la stabilité des points fixes. Le diagramme de liaisons, dans ce contexte, peut même être un outil permettant d'obtenir une idée sur la nature d'un point fixe.

Cette représentation pourrait changer notre conception de la fonction. À l'aide des différentes représentations, ceci pourrait même permettre d'atteindre une conception robuste de la fonction (telle que décrite par Marilyn Carlson et Michael Oehrtman [2]). Ceci pourrait aussi aider les enseignants à atteindre une compréhension profonde des mathématiques fondamentales (si on se permet d'étendre ce concept didactique introduit par Liping Ma, 2010, [22] aux fonctions).

Un exercice intéressant serait d'identifier les concepts qui surgissent naturellement grâce aux généralisations du diagramme de liaisons dans les espaces de plusieurs dimensions (voir les applications de la section 7.2). Il se pourrait que certains concepts liés au domaine de l'analyse complexe ou de l'étude des systèmes dynamiques discrets puissent bénéficier de telles représentations.

7 Annexes

7.1 L'application RTF

7.1.1 Description

L'application *RTF* (Représentation Transformationnelle de la Fonction) a comme objectif de permettre aux utilisateurs d'explorer la représentation transformationnelle de la fonction telle qu'introduite par Grant Sanderson dans sa vidéo *What they won't teach you in calculus* [32]. Les fonctionnalités principales sont la représentation du diagramme de liaisons des fonctions données et la représentation de la composition de fonctions.

L'application est disponible, en français, sous le nom « La fonction et son diagramme de liaisons » à partir de l'URL <https://ggbm.at/bzfuybqt>. Elle aussi disponible en anglais sous le nom « Transformational View of the Function » à l'adresse <https://ggbm.at/rftwacsy>. La version anglaise est aussi accessible directement à partir de la page YouTube de la vidéo de Grant Sanderson (<https://youtu.be/CfW845LNObM>). Le titre RTF a été choisi dans le présent document pour simplifier l'écriture. Bien que l'application soit disponible en anglais et en français, nous nous contenterons ici de décrire la version française. La figure 30 présente un exemple de l'interface.

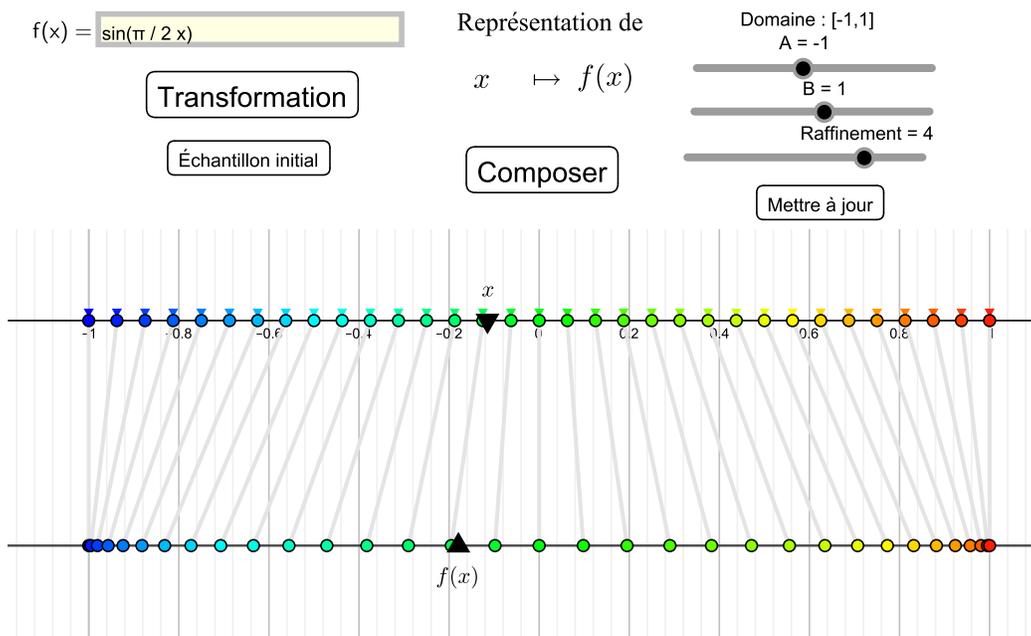


FIGURE 30 – Présentation de l'application RTF.

7.1.2 Environnement de développement

L'application RTF a été créée dans l'environnement Geogebra. Au niveau du développement d'applications de représentations géométriques, il s'agit d'un outil à la fois complexe et accessible.

Cet environnement de développement est accessible directement en ligne ou à partir d'une application téléchargeable. Geogebra permet d'afficher facilement des objets mathématiques dans le plan (et dans l'espace). Son interface utilisateur permet de créer des points, des droites, des segments et plusieurs autres objets géométriques en seulement quelques clics. Il offre aussi la possibilité de personnaliser ces objets grâce à des menus intuitifs. Ceci explique l'accessibilité. D'autre part, il est possible d'utiliser des scripts en langage *JavaScript* afin de créer, modifier, retirer des objets géométriques. Ceci permet de développer des applications plus complexes. Cependant, au niveau du développement, les options restent limitées en ce qui a trait à la gestion des performances de l'application.

Geogebra se surpasse aussi en ce qui a trait à la publication des applications. Il est possible d'utiliser directement l'application créée dans l'environnement de développement en ligne ou téléchargeable. De plus, Geogebra offre l'hébergement de l'application en ligne sur des pages personnalisables. Ceci favorise l'utilisation et l'échange d'applications. Finalement, il existe une communauté active où il est possible de partager des applications.

Ce sont donc les raisons qui expliquent le choix d'environnement pour développer l'application. En ce qui a trait plus précisément à l'application RTF, celle-ci a été développée dans l'environnement Geogebra, mais une majorité de son contenu a été fait en Javascript. Ceci vient du fait que l'application RTF est grandement personnalisable. De plus, le nombre d'objets géométriques à l'écran peut être très élevé. La programmation Javascript permet de gérer un nombre élevé d'objets facilement.

Explorons chaque fonctionnalité de l'application RTF. En bas de l'écran se trouve le diagramme de liaisons de la fonction. En haut de l'écran se trouvent les paramètres (voir la figure 30). Commentons d'abord la partie de l'interface réservée à la représentation de la fonction. Ensuite, nous expliquerons chaque paramètre en détaillant l'influence que cela a sur le diagramme.

7.1.3 Le domaine et le codomaine

Cette partie de l'interface est composée de deux droites horizontales. La droite supérieure représente le domaine de la fonction f . La droite inférieure représente son codomaine. La droite des nombres réels est placée à l'horizontale et les nombres sont en ordre croissant de gauche à droite. Puisque la lecture (en français) se fait du haut vers le bas, j'ai placé le domaine en haut du codomaine. L'attention est donc d'abord dirigée vers le domaine et ensuite vers le codomaine. Cet ordre représente bien ce que fait la fonction dans notre façon de la représenter. Celle-ci doit avoir une entrée pour fournir une sortie. Donc il y a d'abord l'entrée (le domaine) et ensuite la sortie (l'image). De plus, le fait que ces deux droites soient parallèles et près l'une de l'autre permet de renforcer l'idée de transformation ou de passage d'un état à un autre. On a d'abord l'état de la droite réelle telle qu'on la connaît et ensuite l'état de la droite réelle comme étant l'image de la fonction. Il aurait été possible de juxtaposer ces deux droites. Cependant, cela devient très difficile de distinguer le déplacement et la destination de chaque point de l'échantillon.

7.1.4 Le grillage

Dans le diagramme de liaisons se retrouvent des droites verticales grises. Chaque droite correspond à un nombre réel. Ceci permet de graduer le domaine et le codomaine de la même manière. Cela permet, entre autres, de comparer plus aisément la variation du domaine avec la variation de l'image.

7.1.5 Le point d'évaluation

Le curseur noir $f(x)$ sur le codomaine correspond toujours à l'image du curseur x sur le domaine. Il est possible de glisser le curseur x sur le domaine et le curseur $f(x)$ s'adapte automatiquement. Ce curseur permet de déterminer le comportement de la fonction entre les points de l'échantillon. Cet outil permet donc de représenter plus facilement la continuité (ou les discontinuités) de la fonction f directement dans le diagramme de liaisons. Aussi, cela permet de représenter dynamiquement la variation de l'image selon une variation dans le domaine.

7.1.6 L'échantillon

Sur le domaine se trouvent des points colorés. L'ensemble de ces points est appelé l'échantillon. Des paramètres permettent de définir l'échantillon en changeant l'écart entre les points et l'intervalle sur lequel ils sont. Cet échantillon change lorsqu'on compose la fonction avec elle-même (fonction accessible dans les paramètres).

Chacun des points de l'échantillon est relié à son image respective par un segment. En cliquant sur le bouton de transformation, une copie de chacun des points de l'échantillon traverse ce segment pour finalement atteindre son image. Les couleurs des points forment un dégradé qui passe du bleu, au turquoise, au vert, au jaune, à l'orange et finalement au rouge. Ce dégradé permet de distinguer chacun des points lorsqu'ils se déplacent sur leur segment respectif et lorsqu'ils ont atteint leur image. Cependant, lorsque l'échantillon est composé d'un grand nombre de points, il devient difficile de discerner la couleur de deux points adjacents. Il est toutefois possible de déterminer ces points grâce au segment visible sur lequel ils se situent. De plus, lorsque les points se déplacent du domaine au codomaine, ceux-ci ont différentes hauteurs. Cela permet de mieux distinguer le déplacement individuel de chaque point.

Les figures 31, 32, 33, 34 et 35 présentent un exemple où l'utilisation de ces astuces visuelles permet de mieux représenter le comportement de la fonction. La fonction représentée est $f(x) = -x$. La figure 31 présente l'échantillon ainsi que les segments qui relient chaque point à son image respective. À la figure 32, on voit les points de l'échantillon qui ont été copiés et déplacés sur leur segment respectif. Comme les points quittent le domaine en ordre croissant, une différence de hauteur se crée. Les segments qui relient les points à leur image s'intersectent tous en un point. S'il n'y avait pas de différence de hauteur, tous les points se superposeraient à cette position. À la figure 33, on remarque que ce problème ne se produit pas. Chaque point passe l'un après l'autre par cette intersection. De plus, on note que l'ordre des points semble se renverser. Ceci est plus apparent à la figure 34. À la figure 35, les points sont à la position de leur image respective dans le codomaine. On remarque que l'image de l'échantillon est le même ensemble que l'échantillon. Cependant, les couleurs permettent de bien voir la préimage de chacun des points. On remarque

aussi que le dégradé de couleur est renversé. Ceci nous indique que l'ordre des points dans l'image est inversé. Autrement dit, ceci nous permet de déduire que la fonction est décroissante.

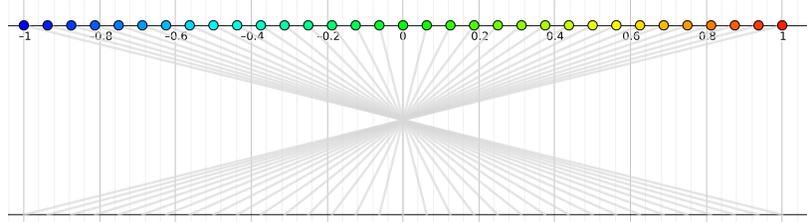


FIGURE 31 – Représentation de la fonction $f(x) = -x$. Chaque point de l'échantillon est relié à son image.

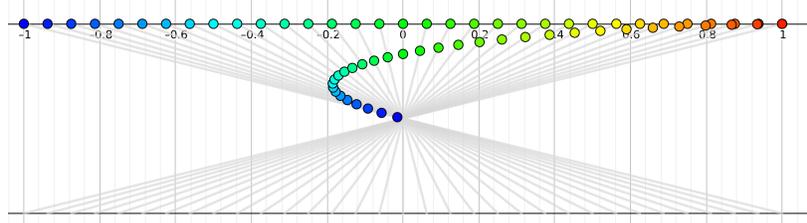


FIGURE 32 – Chaque point de l'échantillon est copié et déplacé vers son image respective.

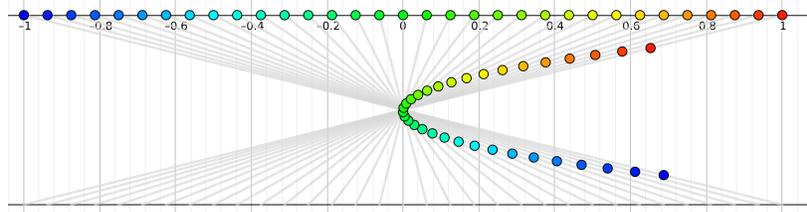


FIGURE 33 – Les points quittent le domaine en ordre croissant. La hauteur des points n'étant pas la même, il devient plus facile de distinguer les points.

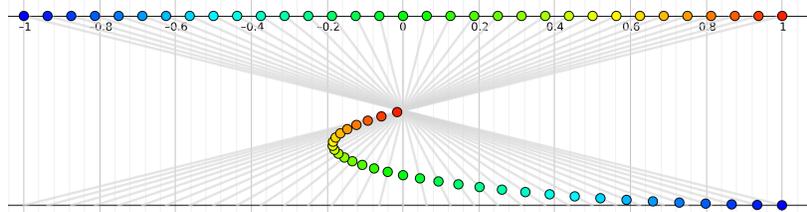


FIGURE 34 – L'ordre des couleurs se renverse.

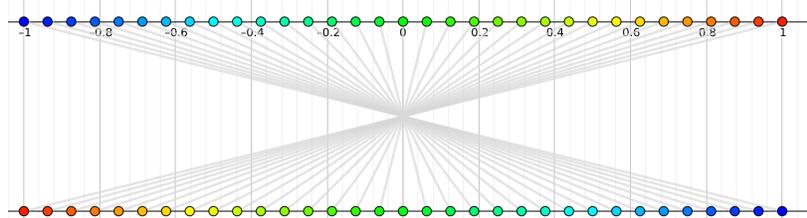


FIGURE 35 – Bien que l'image de l'échantillon soit le même ensemble que l'échantillon lui-même, la couleur des points permet de distinguer leur préimage respective.

7.1.7 La fonction

Le champ texte personnalisable situé à droite du texte « $f(x) =$ » (figure 36) représente la fonction qui sera représentée. Par défaut, il s'agit de la fonction $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. La fonction doit être exprimée en fonction de x . Il est possible d'utiliser les opérations d'addition (+), de soustraction (-), de multiplication (*) et de division (/). La notation exponentielle est aussi accessible (^). Plusieurs fonctions peuvent être utilisées directement : les fonctions trigonométriques (sin, cos, tan, cot, etc.), la notation factorielle (!), la fonction valeur plancher (floor), etc. Une liste détaillée des fonctions et opérations prédéfinies se trouve à l'adresse suivante https://wiki.geogebra.org/en/Predefined_Functions_and_Operators. De plus, il est possible de définir la fonction par morceaux en utilisant la notation *if*. Pour plus de détails, voir la page https://wiki.geogebra.org/en/If_Command.

Lorsque la fonction est modifiée, l'interface est aussitôt mise à jour à l'état initial. Autrement dit, le niveau de composition de la fonction f est réinitialisé à 1 et l'échantillon s'ajuste selon le domaine, le raffinement et le niveau de transformation choisi.

L'intérêt de l'application RTF repose essentiellement sur la possibilité de représenter la fonction qui nous intéresse. En effet, dans la vidéo de 3Blue1Brown, il n'est pas possible de choisir notre propre fonction. L'application RTF est une sorte de prolongement personnalisable de la technique de représentation présentée par 3Blue1Brown. Cette fonctionnalité est donc le cœur de l'application.

$$f(x) = \text{sin}(\pi / 2 x) \quad \text{Rep}$$

FIGURE 36 – Champ texte permettant de choisir la fonction.

7.1.8 La transformation

Le bouton *Transformation* permet de représenter la relation dynamique entre les points de l'échantillon et leur image respective. Chaque point de l'échantillon du domaine est relié à son image par un segment. Lorsqu'on clique sur le bouton *Transformation*, une copie de chaque point de l'échantillon est créée et déplacée sur son segment respectif. Ces points copiés se déplacent jusqu'à leur image respective. Les plus petites valeurs du domaine quittent la droite en premier alors que les plus grandes la quittent en dernier. Les points de l'échantillon en bleu représentent les plus petites valeurs alors que les points en rouge représentent les plus grandes. Ainsi, durant cette transition, il est possible de suivre le déplacement de chaque point. Notons que la vitesse de déplacement des points est non linéaire. Ce choix esthétique permet de rendre plus douce l'animation du déplacement des points.

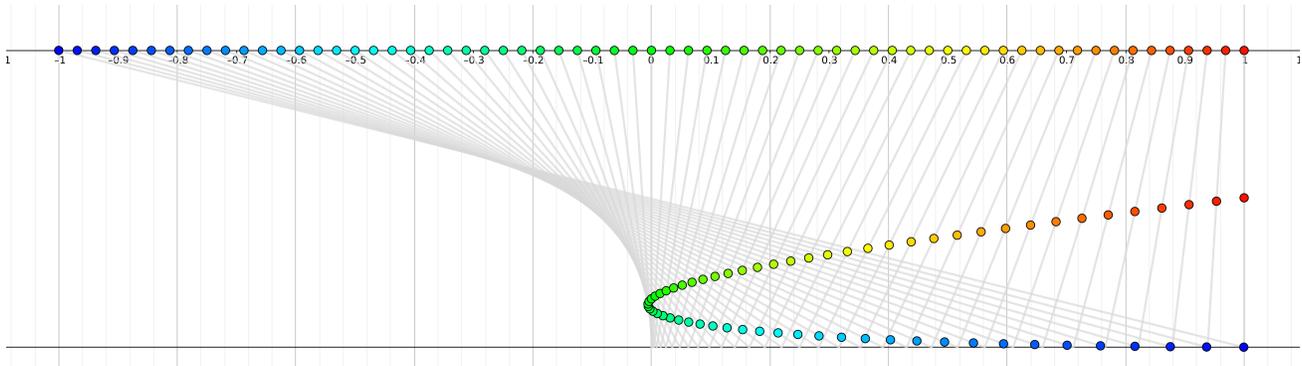
Cette transformation a comme rôle de permettre de bien représenter la relation qu'il y a entre l'image et la préimage de chaque point. Toutefois, notons que ce déplacement des points peut, d'un point de vue didactique, être source de fausses conceptions. Par exemple, le fait que les

FIGURE 37 – Bouton *Transformation*.

points se déplacent entre l'image et la préimage peut laisser croire qu'il y a un passage continu constitué d'une infinité d'étapes entre le domaine et l'image. En réalité, ce passage ne se divise qu'en deux étapes : le domaine et l'image. Il n'y a que deux quantités en jeu.

De plus, puisque cette animation est très tape-à-l'œil, il peut parfois attirer l'attention davantage que la propriété mathématique qu'on tente de représenter. Ce phénomène est d'autant plus amplifié lorsque des symétries ou des figures se forment avec les segments ou les points. Par exemple, dans la représentation de la fonction x^2 à la figure 38, durant l'animation, les points forment une courbe qui ressemble à une parabole. D'un côté, la figure 38 peut créer des conflits cognitifs indésirables dans certains contextes : on pourrait être tenté d'associer cette parabole au fait qu'on représente x^2 . Or, ce n'est pas nécessairement le cas. En effet, ce phénomène se présente toujours à un certain moment de l'animation si la fonction est décroissante. Ce n'est donc pas parce que x^2 est représentée qu'on voit apparaître cette courbe, mais plutôt parce que la dérivée de x^2 est négative sur l'intervalle $[-1, 0)$.

D'un autre côté, cette animation est très rapide. Il y a donc peu de chance que l'attention soit dirigée vers une étape ou une image aussi précise que celle-ci. Ajoutons à cela que la courbe créée dans l'animation permet d'avoir de l'information sur la fonction. Elle permet de voir que les valeurs négatives sont envoyées vers des valeurs positives. On voit les points de l'intervalle $[-1, 0)$ se replier sur eux-mêmes en passant au-delà du point fixe 0. On a donc un indice visuel qui nous permet de voir que, par exemple, x^2 envoie $\{-3, -2, -1\}$ et $\{1, 2, 3\}$ vers $\{1, 2, 3\}$.

FIGURE 38 – Représentation de x^2 durant l'animation de transformation.

Dans le même ordre d'idées, à la figure 39, l'enveloppe des segments reliant l'échantillon à l'image forme un cercle. Bien qu'il puisse être intéressant de comprendre pourquoi un tel cercle se forme, il faut comprendre que son existence est en partie due au choix de la représentation de la fonction. Grant Sanderson en fait d'ailleurs mention dans sa vidéo [32].

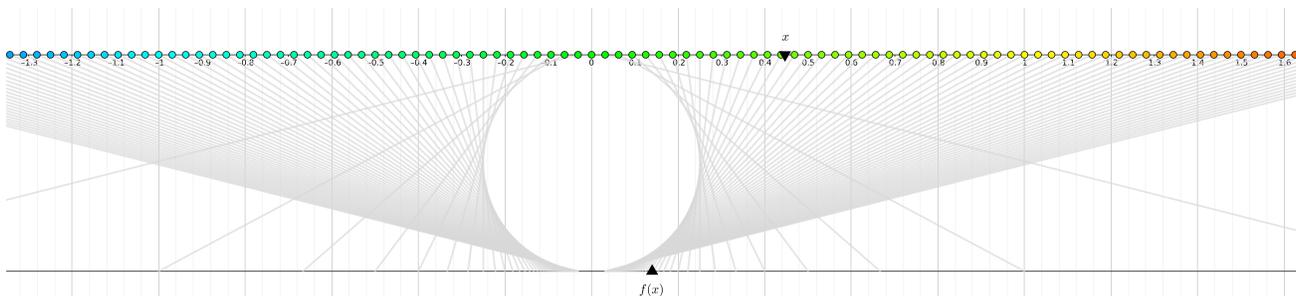


FIGURE 39 – Représentation de $\frac{1}{16x}$.

7.1.9 Le domaine et le raffinement de l'échantillon

L'intervalle sur lequel est défini l'échantillon se nomme le domaine. Celui-ci apparaît en haut à droite de l'écran des paramètres. Pour modifier le domaine, il suffit de modifier les valeurs de A et B en glissant les curseurs correspondants. Le domaine correspond à l'intervalle $[A, B]$. Pour que la représentation de la fonction soit efficace, il est généralement préférable que la longueur de cet intervalle soit petite. En effet, le diagramme de liaisons est généralement mieux adapté pour représenter le comportement local d'une fonction.

Le paramètre de raffinement détermine la distance entre les points de l'échantillon. Conséquentement, cela détermine le nombre de points dans l'échantillon. Si n est la valeur du paramètre de raffinement, alors la distance entre les points de l'échantillon est égale à 2^{-n} .

Pour que la modification de ces paramètres prenne effet, il faut appuyer sur le bouton *Mettre à jour*. Lorsque ce bouton est appuyé, le niveau de composition de la fonction f est réinitialisé à 1 et l'échantillon s'ajuste selon le domaine, le raffinement et le niveau de transformation choisi.

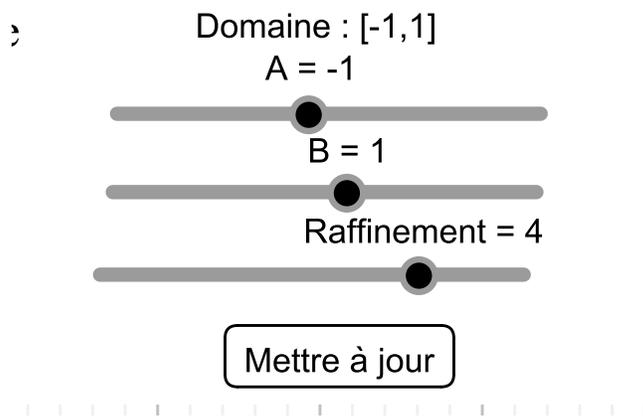


FIGURE 40 – Paramètres permettant de modifier l'échantillon.

7.1.10 La composition

Le bouton *Composer* permet de représenter l'image de l'image de l'échantillon (voir la figure

41). En cliquant n fois sur ce bouton, il est possible de représenter l'image de l'échantillon avec la fonction

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} .$$

Plus précisément, après avoir cliqué n fois sur *Composer*, la variation du paramètre de transformation nous permet de représenter le passage de $f^{n-1}(X)$ à $f^n(X)$, où X est l'ensemble des points de l'échantillon. Donc, dans ce contexte, l'échantillon du domaine ne représente pas X (l'échantillon), mais plutôt $f^{n-1}(X)$. Il est toutefois possible de représenter l'échantillon initial en appuyant sur le bouton *Échantillon initial* (voir la figure 42). Ceci permet alors d'afficher ou de cacher l'échantillon initial qui apparaît sous la forme de triangles colorés au-dessus du domaine.

Le texte « Représentation de $f^{n-1}(x) \mapsto f^n(x)$ » permet de savoir le nombre de fois qu'on a cliqué sur le bouton *Composer*. C'est aussi ce qui nous permet de savoir à quoi correspondent l'échantillon ($f^{n-1}(X)$) et son image ($f^n(X)$). Notons toutefois que peu importe la composition de f , les curseurs x et $f(x)$ sur le domaine et le codomaine représentent toujours respectivement un élément du domaine x et son image $f(x)$.

Représentation de

$$x \mapsto f(x)$$

Composer



$$f(x) = \sin(\pi / 2 x)$$

Transformation

Échantillon initial

FIGURE 41 – Paramètres liés à la composition.

FIGURE 42 – Bouton *Échantillon initial*.

Voici une explication de l'animation qui se produit lorsqu'on clique sur le bouton *Composer*. Cette animation dure normalement entre 1 et 2 secondes. D'abord, si ce n'est pas déjà fait, une copie de chaque point de l'échantillon est créée et déplacée le long de son segment respectif jusqu'à l'image. Par la suite, l'échantillon disparaît et les segments qui reliaient chaque point de l'échantillon à son image sont remplacés par d'autres segments. Ces nouveaux segments sont verticaux et chacun d'entre eux passe par un point de l'image de l'échantillon initial. Ensuite, chaque point de l'image de l'échantillon initial se déplace le long de son segment respectif vers le domaine. Finalement, on prend ces points comme étant le nouvel échantillon. Ainsi, les segments verticaux sont retirés pour faire place à des segments qui relient chaque point du nouvel échantillon à son image. Le paramètre de transformation fonctionne alors avec ce nouvel échantillon.

L'objectif de cette animation et de la fonctionnalité de composition de l'application RTF est de représenter la composition d'une fonction d'un point de vue algorithmique ou informatique. D'abord, on choisit l'échantillon. Ensuite, on l'évalue pour obtenir l'image de l'échantillon et

finalement, on remplace notre échantillon par cette image. Cette façon de voir la composition permet de représenter certaines notions qui entourent le concept de points fixes.

7.2 Les autres applications

Dans le cadre de mon exploration de la représentation transformationnelle de la fonction, j'ai développé d'autres applications qui permettent de généraliser le diagramme de liaisons. Celles-ci sont présentées brièvement dans cette section.

7.2.1 La composition de deux fonctions

Cette application a comme objectif de représenter la composition de deux fonctions différentes données à l'aide de leur diagramme de liaisons (voir la figure 43). Cette application a été conçue dans le but de pouvoir créer des exemples de représentations de la règle de dérivation en chaîne. Elle est accessible à partir de l'URL <https://ggbm.at/yw4g4hrj>.

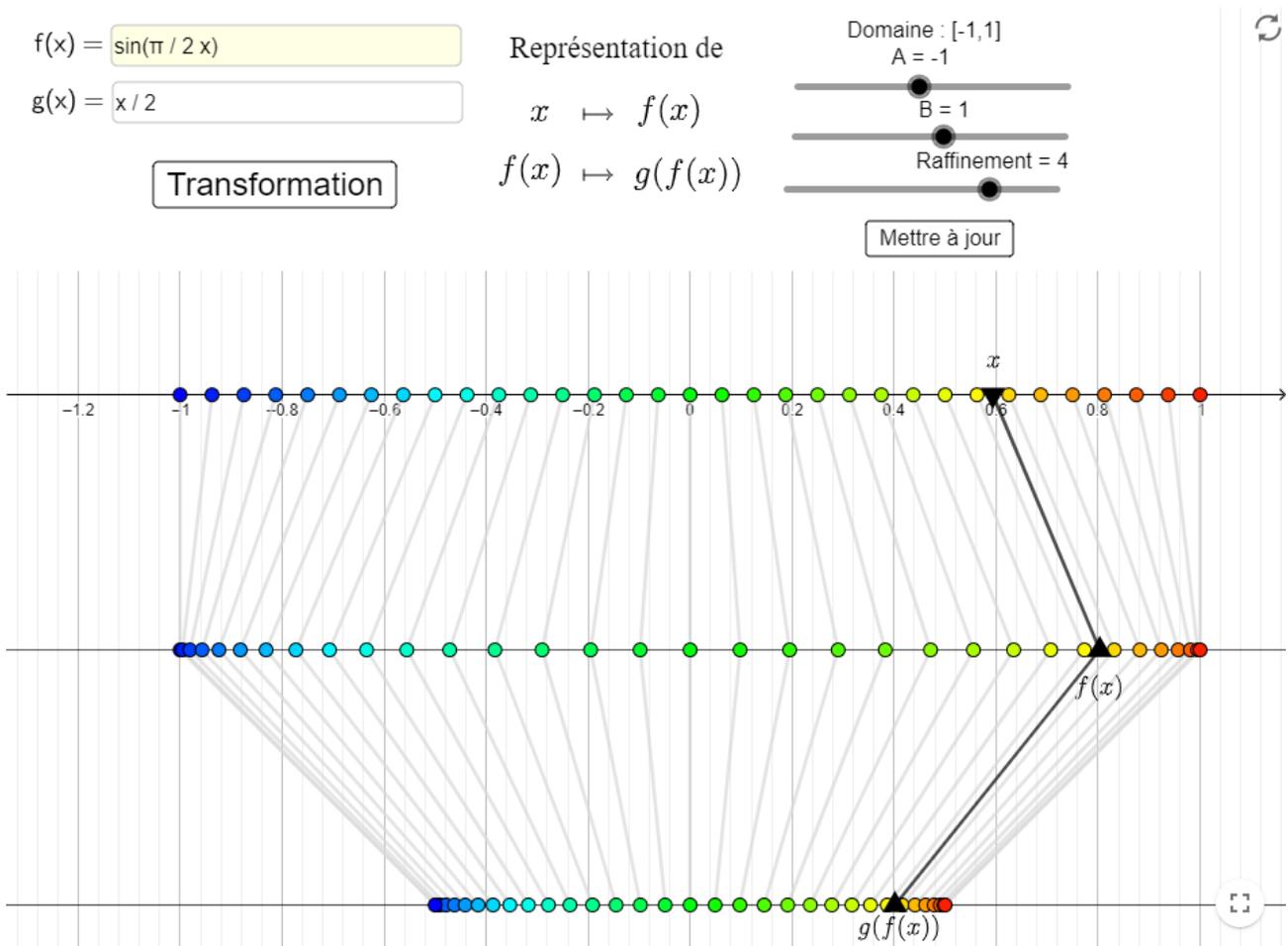


FIGURE 43 – Application permettant de représenter la composition de deux fonctions différentes à l'aide des diagrammes de liaisons.

7.2.2 Les fonctions de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2

Cette application possède les mêmes objectifs que l'application RTF. Toutefois, celle-ci permet de représenter des fonctions de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 . Il est aussi possible de composer la fonction avec elle-même autant de fois qu'on le souhaite. Cette application demande une grande quantité de calculs à l'ordinateur. Les performances peuvent être réduites si elle n'est pas exécutée avec un ordinateur assez puissant. Voici un lien pour accéder à cette application : <https://ggbm.at/pxdhzdfj>.

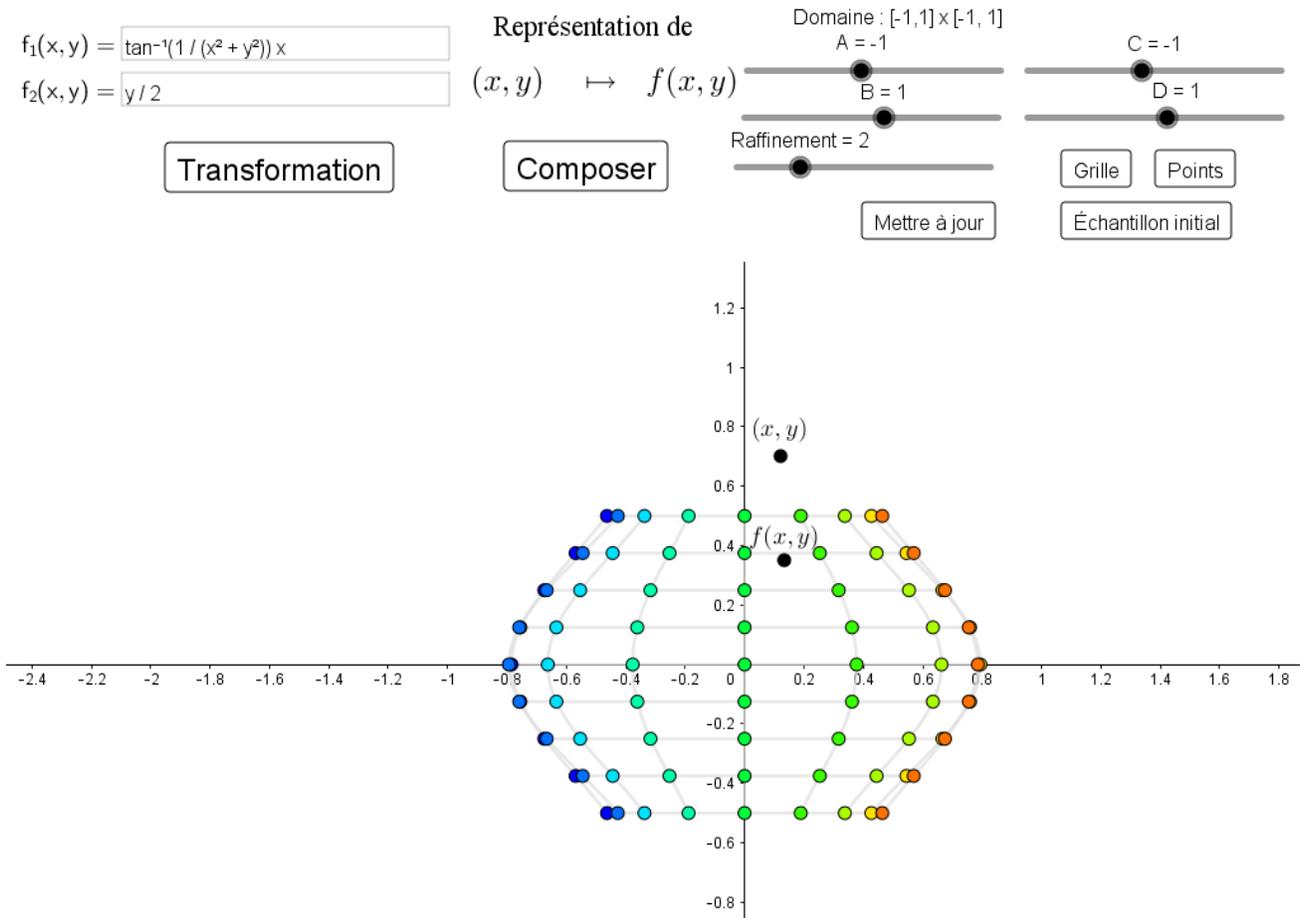


FIGURE 44 – Application semblable à RTF pour les fonctions de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 .

7.2.3 Les fonctions de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^3

Cette application possède les mêmes objectifs que l'application RTF. Toutefois, celle-ci permet de représenter des fonctions de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^3 . Il est aussi possible de composer la fonction avec elle-même autant de fois qu'on le souhaite. Cette application demande une grande quantité de calculs à l'ordinateur. Les performances peuvent être réduites si elle n'est pas exécutée avec un ordinateur assez puissant. Voici un lien pour accéder à cette application : <https://ggbm.at/vxk7vefr>.

$f_1(x, y, z) =$
 $f_2(x, y, z) =$
 $f_3(x, y, z) =$

Transformation

Représentation de

$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$

Composer

Domaine : $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$

A = -1

B = 1

C = -1

D = 1

E = -1

F = 1

Raffinement = 1

Mettre à jour

Échantillon initial Grille Points

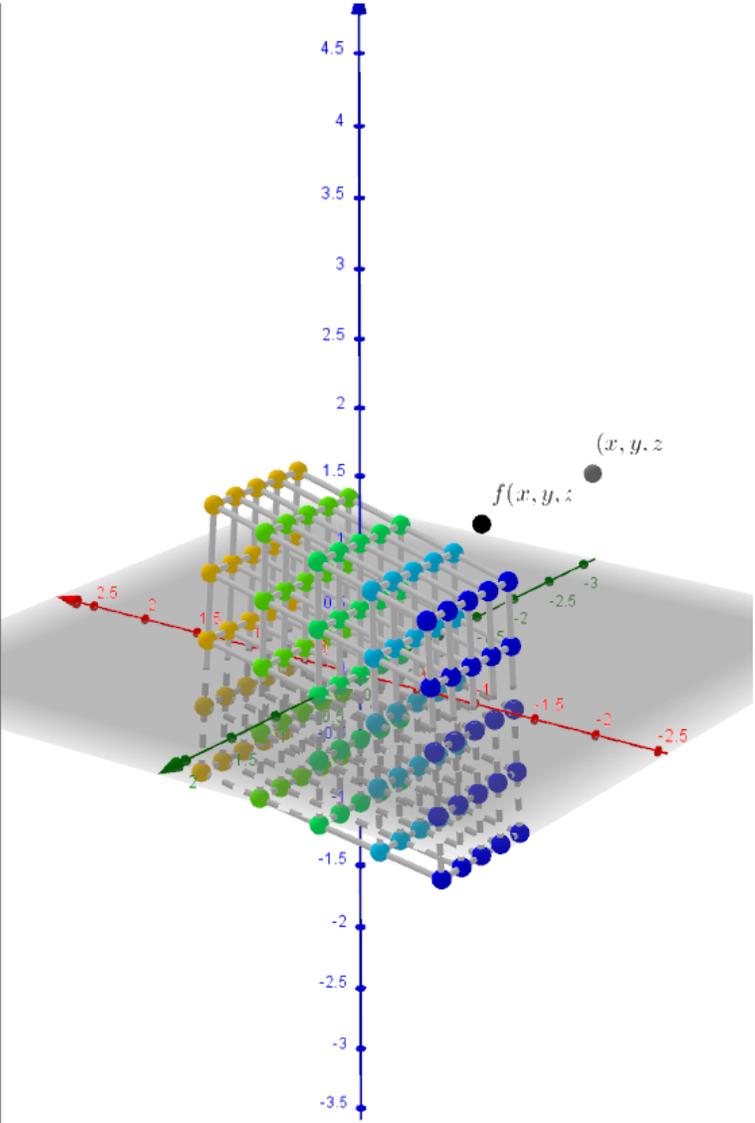


FIGURE 45 – Application semblable à RTF pour les fonctions de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^3 .

8 Références

- [1] Deborah Loewenberg Ball and Hyman Bass. Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group / Groupe Canadien d'Etude en Didactique des Mathématiques*, pages 4–14, 2002.
- [2] Marilyn Carlson and Michael Oehrtman. Research sampler 9 : Key aspects of knowing and learning the concept of function. *Mathematical Association of America*. [En ligne ; consulté le 27 mars 2019]. URL : <https://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function#important>.
- [3] Hugo Chapdelaine and Bernard R. Hodgson. *Éléments de mathématiques*. 7e édition, 2018.
- [4] Philip J. Davis and James A. Anderson. Nonanalytic aspects of mathematics and their implication for research and education. *SIAM Review*, 21(1) :112–127, 1979. URL : <http://www.jstor.org/stable/2029936>.
- [5] Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur du Québec. *Progression des apprentissages au secondaire - Mathématique*. 2016. URL : http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/education/jeunes/pfeq/PDA_PFEQ_mathematique-secondaire_2016.pdf.
- [6] Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur du Québec. *Programme d'études mathématiques - 2e cycle du secondaire*. 2017. URL : http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/dpse/educ_adulte_action_comm/Prog_Mathematique_FBD_2017_FR.pdf.
- [7] Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur du Québec. *Sciences de la nature (200.B0) - Programme d'études préuniversitaires*. 2017. URL : http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/enseignement-superieur/200.B0_Sciences_nature_VF.pdf.
- [8] René Descartes. *La geometrie de René Descartes*. Chez Charles Angot, Paris, 1664. URL : <http://ariane.ulaval.ca/cgi-bin/recherche.cgi?qu=a2168364>.
- [9] Allison Dorko and Eric Weber. Students'concept images of average rate of change. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pages 386 – 393, 2013.
- [10] Tommy Dreyfus. On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. *Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Assisi, Italy*, 3(12), 1991.
- [11] Ed Dubinsky and Guershon Harel. *The Concept of function : aspects of epistemology and pedagogy*. MAA notes. Mathematical Association of America, [Washington], 1992. URL : <http://ariane.ulaval.ca/cgi-bin/recherche.cgi?qu=01-0164627>.
- [12] Raymond Duval. Representation, vision and visualization : Cognitive functions in mathematical thinking. basic issues for learning. pages 3–26, 1999.
- [13] Martin Flashman. Site internet personnel de martin flashman, 2017. [En ligne ; accédé le 13 février 2019]. URL : <https://flashman.neocities.org/>.

- [14] André Fortin. *Analyse numérique pour ingénieurs*. Coursus. Presses internationales Polytechnique, [Montréal (Québec)], 5e édition, 2015. URL : <http://ariane.ulaval.ca/cgi-bin/recherche.cgi?qu=a2591794>.
- [15] Josée Hamel and Luc Amyotte. *Calcul différentiel*. Erpi sciences. Pearson ERPI, Montréal (Québec) Canada, 2e édition, 2018. URL : <http://ariane.ulaval.ca/cgi-bin/recherche.cgi?qu=a2807504>.
- [16] Gila Hanna. Proof, explanation and exploration : An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1) :5–23, 2000. doi:10.1023/A:1012737223465.
- [17] David Henderson. Alive mathematical reasoning. *40 Years of CMESG/Les 40 Ans du GCEDM. 40th Anniversary Issue of the Canadian Mathematics Education Study Group/Groupe Canadien d'Étude en Didactique des Mathématiques*, pages 89–106, 2016. URL : <https://eric.ed.gov/?id=ED581058>.
- [18] Markus Hohenwarter and al. Geogebra, 2019. [En ligne ; accédé le 13 février 2019]. URL : <https://www.geogebra.org/>.
- [19] Fred Kuczumski. Rubber band calculus. *The College Mathematics Journal*, 47(2) :82–93, 2016. doi:10.4169/college.math.j.47.2.82.
- [20] KZ Labs. Quick graph, 2011. [Application mobile ; utilisée en 2011]. URL : <https://itunes.apple.com/us/app/quick-graph/id292412367?mt=8>.
- [21] Eli Luberoff. Desmos, 2011. [En ligne ; accédé le 13 février 2019]. URL : <https://www.desmos.com/>.
- [22] Liping Ma. *Knowing and teaching elementary mathematics : teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Studies in mathematical thinking and learning. Routledge, New York, anniversary ed edition, 2010. URL : <http://ariane.ulaval.ca/cgi-bin/recherche.cgi?qu=a2376447>.
- [23] Waterloo Ontario Maplesoft, une division de Waterloo Maple Inc. Maple, 1982. [Logiciel ; utilisé entre 2013 et 2015].
- [24] Cleve Moler. Matlab. [Logiciel ; utilisé entre 2015 et 2019].
- [25] William P. Thurston. On proof and progress in mathematics. *The Bulletin of the American Mathematical Society*, 30, 1994. doi:10.1090/S0273-0979-1994-00502-6.
- [26] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis / Walter Rudin*. McGraw-Hill New York, 3d ed. édition, 1976. URL : <http://www.loc.gov/catdir/toc/mh031/75017903.html>.
- [27] Grant Sanderson. The determinant | essence of linear algebra, chapter 6. [En ligne ; accédé le 13 février 2019]. URL : <https://www.youtube.com/watch?v=Ip3X9L0h2dk>.
- [28] Grant Sanderson. Divergence and curl : The language of maxwell's equations, fluid flow, and more. [En ligne ; accédé le 13 février 2019]. URL : <https://www.youtube.com/watch?v=rB83DpBJQsE>.
- [29] Grant Sanderson. Eigenvectors and eigenvalues | essence of linear algebra, chapter 13. [En ligne ; accédé le 13 février 2019]. URL : <https://www.youtube.com/watch?v=PFDu9oVAE-g>.
- [30] Grant Sanderson. Thinking visually about higher dimensions. [En ligne ; accédé le 13 février 2019]. URL : <https://www.youtube.com/watch?v=zwAD6dRSVyI>.
- [31] Grant Sanderson. Visualizing the chain rule and product rule | essence of calculus, chapter 4. [En ligne ; accédé le 13 février 2019]. URL : <https://www.youtube.com/watch?v=YG15m2VwSjA>.

- [32] Grant Sanderson. What they won't teach you in calculus. [En ligne; accédé le 13 février 2019]. URL : <https://www.youtube.com/watch?v=CfW845LN0bM>.
- [33] Scott Steketee and Daniel Scher. Using multiple representations to teach composition of functions. *Mathematics Teacher*, 106(4) :260–268, 2012. doi:10.5951/mathteacher.106.4.0260.
- [34] James Stewart, Stéphane Beauregard, and Chantal Trudel. *Calcul différentiel*. Groupe Modulo, Montréal, 2013. URL : <http://ariane.ulaval.ca/cgi-bin/recherche.cgi?qu=a2221550>.
- [35] H. Swann and J. Johnson. *Prof. E. McSquared's Calculus Primer : Expanded Intergalactic Version!* Dover Publications, 2016. URL : <https://books.google.com.pa/books?id=qzo2DwAAQBAJ>.
- [36] Dawn Teuscher, Robert E. Reys, Thomas A. Evitts, and Karen Heinz. Slope, rate of change, and steepness : Do students understand these concepts? *The Mathematics Teacher*, 103(7) :519–524, 2010.
- [37] Stephen Wolfram. Wolfram alpha, 2009. [En ligne; consulté entre 2011 et 2019]. URL : <https://www.wolframalpha.com/>.