

# La contribution d'outils visuels à l'apprentissage de la théorie des groupes

Dans le cadre du cours :

*MAT-6500 (Essai)*

Document présenté à :

Frédéric Gourdeau, directeur

Bernard Hodgson, codirecteur

Document présenté par :

Amélia Bordeleau

111 102 715



Le 5 décembre 2019

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>I</b>		<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Thèse de Caroline Lajoie</b>	<b>7</b>
2.1	Introduction . . . . .	7
2.2	Bref survol historique . . . . .	8
2.3	Difficultés liées aux premiers apprentissages de la théorie des groupes	10
<b>3</b>	<b>Cadre théorique</b>	<b>19</b>
3.1	Théorie APOS . . . . .	19
3.2	Réduction d'abstraction . . . . .	22
3.3	Conclusion . . . . .	24
<b>II</b>		<b>26</b>
<b>4</b>	<b>Visual Group Theory (Carter)</b>	<b>26</b>
4.1	Analyse comparative de séquences pédagogiques . . . . .	26
4.2	Impact de la construction de Carter sur les difficultés identifiées par Lajoie . . . . .	28
4.3	Introduction de la notation . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Analyse d'outils</b>	<b>34</b>
5.1	Cube Rubik . . . . .	35
5.2	Diagrammes de Cayley . . . . .	39
5.3	Groupe . . . . .	41
5.4	Sous-groupe . . . . .	45
5.5	Isomorphisme . . . . .	48
5.6	Conclusion . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Méthodes d'enseignement alternatives pour la théorie des groupes</b>	<b>53</b>
6.1	Étude de symétrie . . . . .	54

6.2	Approche constructiviste . . . . .	54
6.3	Enseigner avec Group Explorer . . . . .	56
6.4	Intuition commune : d'opposé de chat aux inverses de groupes . . . . .	58
6.5	Retour sur les méthodes . . . . .	59
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>59</b>
<b>A</b>	<b>Annexe</b>	<b>66</b>

## Table des figures

1	Construction d'un schéma (DUBINSKY, 1991, p.107). . . . .	21
2	Construction de cours d'algèbre classique. . . . .	27
3	Structure de la séquence d'introduction de Carter. . . . .	28
4	Analyse comparative de différentes séquences d'introduction. . . . .	29
5	Analyse comparative de différentes séquences (CARTER, 2009, p.22). .	34
6	État résolu du SWAP. . . . .	38
7	Carte du cube Rubik (CARTER, 2009, p. 13). . . . .	40
8	Diagramme de Cayley pour le rectangle et pour $K_4$ . . . . .	41
9	Évolution de la conception objet de l'étudiant. . . . .	43
10	Diagramme de Cayley pour $G_3$ . . . . .	44
11	Diagramme de Cayley pour $S_3$ et ses orbites. . . . .	45
12	Certains sous-groupes de $S_3$ . . . . .	46
13	Graphe de $C_6$ en fonction de différents ensembles de générateurs. . . .	46
14	Diagramme de Cayley pour un groupe de deux interrupteurs. . . . .	49
15	Diagramme de Cayley pour le rectangle et pour $K_4$ . . . . .	49
16	Isomorphisme entre $C_3$ et un groupe de nombres complexes. . . . .	51
17	Le premier théorème d'homomorphisme présenté avec le groupe $A_4$ (CARTER, 2009, p. 123) . . . . .	53
18	Distribution des notes par type de cours (CLARK et al., 1999, p. 83). .	56
19	Extrait du logiciel Group Explorer pour le groupe $S_3$ (SCHUBERT et al., 2013, p. 380). . . . .	57

# 1 Introduction

L'ambition de l'algèbre est de pousser le plus loin possible l'étude des conséquences logiques d'un nombre restreint d'axiomes. La transition entre l'algèbre classique et l'algèbre moderne est marquée par l'étude de la structure de différents systèmes, mais aussi par l'étude des opérations algébriques indépendamment des mathématiques auxquelles elles peuvent s'appliquer. Le cours de premier cycle universitaire, Algèbre 1, est le premier cours où les étudiants ont à manipuler des systèmes formels et dans lequel ils sont exposés à ce niveau d'abstraction.

J'ai réalisé mon projet de fin de baccalauréat sur la théorie des groupes de différents jeux mathématiques comme le cube Rubik. Dès ce moment, j'ai été surprise par l'abondance de ressources pour l'enseignement de l'algèbre. Dans le cadre de ce projet, j'ai pu créer un atelier sur le cube Rubik et celui-ci a suscité un grand intérêt des étudiants : intérêt surprenant considérant la difficulté dégagée par les conversations étudiantes à propos de l'algèbre. De plus, j'ai pu explorer plusieurs approches pour l'apprentissage du concept de groupe et en comparer les différentes contributions dans un cours sur le design de tâches mathématiques à l'Université Concordia. Ce sont ces différentes expériences qui ont dirigé le choix de mon sujet d'essai.

Le présent essai vise à identifier et à décrire comment différentes ressources pourraient contribuer à l'apprentissage de concepts de théorie des groupes. Un intérêt particulier a été donné aux ressources ayant une composante visuelle.

La première partie est consacrée à mieux comprendre les enjeux relatifs à l'apprentissage de la théorie des groupes. Certains travaux abordant des difficultés inhérentes à ce domaine sont présentés afin d'établir un portrait global de la gestion des étudiants de l'abstraction caractéristique de l'algèbre. Cette partie permet de créer une liste de critères d'observation voulant contribuer à dresser un portrait plus exact des ressources disponibles.

La deuxième partie se concentre sur le livre de Nathan Carter (CARTER, 2009), *Visual Group Theory*, qui présente la théorie des groupes à travers différentes illustrations mathématiques ou de la vie quotidienne, toutes visuelles et colorées. Plusieurs ressources auraient pu être étudiées, cependant le présent essai se concentre sur le livre de Carter en raison de l'ampleur de la portée de l'ouvrage sur l'apprentissage des élèves. La section consiste d'abord en une analyse comparative de séquence d'introduction des concepts, séquence qui peut avoir un impact significatif sur la compréhension des étudiants. Ensuite, une analyse du contenu proposé par Carter est réalisée en utilisant les critères d'observations développés dans la première partie.

Finalement, la dernière section fait un court survol des différentes ressources trouvées lors de la revue de littérature. Ces ressources consistent en plusieurs initiatives du corps enseignant qui ont tenté de transformer l'enseignement de la théorie des groupes. Ainsi, sans être l'objet principal de cet essai, ces méthodes sont présentées, car elles peuvent fournir des alternatives intéressantes au format du cours Algèbre 1, tel qu'enseigné actuellement.

# Première partie

## 2 Thèse de Caroline Lajoie

Plusieurs chercheurs et enseignants ont remarqué les difficultés des étudiants dans l'apprentissage de ce domaine mathématique et plusieurs ont même tenté de varier les approches d'enseignement pour contourner certaines difficultés. D'autres, comme Caroline Lajoie, Ed Dubinsky et Orit Hazzan, ont tenté d'identifier ces difficultés et de comprendre leurs sources. L'objectif de la première partie est de mieux comprendre les enjeux de l'apprentissage de la théorie des groupes : les difficultés et le processus par lequel les étudiants assimilent les concepts de cette branche de l'algèbre. Pour ce faire, la thèse de Lajoie (LAJOIE, 2000) est principalement utilisée, mais un article de Hazzan (HAZZAN, 1999) et la théorie APOS (DUBINSKY, 1991) qui décompose de façon assez naturelle les processus derrière l'acquisition de nouveaux concepts mathématiques sont aussi présentés. Finalement, une grille d'observation est réalisée avec les points importants de ces différentes ressources afin de préparer l'analyse des outils visuels présentée en deuxième partie.

### 2.1 Introduction

Caroline Lajoie est présentement professeure et chercheure en didactiques des mathématiques à l'UQAM. La thèse de Lajoie : Difficultés liées aux premiers apprentissages de la théorie des groupes (LAJOIE, 2000) avait comme objectif de décrire et d'interpréter les difficultés rencontrées par les étudiants lors de l'apprentissage de concepts relatifs à la théorie des groupes. Étant donné l'ampleur et la nature de ses travaux, cette thèse constitue la principale source d'identification de difficultés utilisée dans cet essai. On présentera certains points de la synthèse du développement historique du concept de groupe qui contribuent à la réflexion réalisée dans la section suivante. Puis, on mettra en évidence les résultats de l'expérimentation effectuée sur 10 étudiants du premier cycle universitaire ayant effectué au moins un cours d'introduction aux structures algébriques.

## 2.2 Bref survol historique

L'idée de groupe a été utilisée de façon implicite par de nombreux mathématiciens : en théorie des nombres par Cauchy, Ruffini, Abel et Lagrange ; en théorie des équations par Gauss et Kronecker ; ou encore en géométrie par Klein. Le premier mathématicien à utiliser le terme « groupe », dans le sens qu'on lui accorde aujourd'hui, est Évariste Galois (1811-1832). Il travaille avec un groupe de permutations fermé pour la multiplication. Galois fait une grande distinction entre sa théorie et l'application de celle-ci aux équations qu'il tente de résoudre. Cette distinction est révolutionnaire pour l'époque. Malheureusement, l'attention des mathématiciens qui reprennent les travaux de Galois a porté sur les équations et leurs solutions plutôt que sur la théorie qu'il développait.

Les travaux de Galois ont été repris par Jordan (1838-1922) dans un commentaire sur Galois en 1869. Il fait la transition entre les groupes de permutations et les groupes de transformations en géométrie et en analyse dans son mémoire sur les groupes de mouvements. Les travaux de Jordan ont ensuite été repris par Klein (1849-1925) et Klein devient le premier mathématicien à considérer les isométries comme les éléments d'un groupe, qu'on appellera par la suite le groupe de Klein.

L'idée de groupe introduite par Galois a évolué avec les travaux de nombreux mathématiciens. Le premier à en donner une définition abstraite est Cayley, en 1854, qui définit un groupe comme :

*« A set of symbols  $\{1, a, b, \dots\}$  all of them different, and such that the product of any two of them (no matter in what order), or the product of any one of them into itself, belongs to the set is said to be a group. »*

(Cayley, cité par LAJOIE, 2000, p. 64)

Il affirme que, pour manipuler un groupe efficacement, il faut se détacher de la signification des symboles : par exemple que  $+$  est une opération quelconque plutôt que l'addition. Sa tentative d'abstraction de la définition de groupe est prématurée pour l'époque. Il démontre aussi qu'un groupe est entièrement déterminé par sa table de



composition. C'est seulement après 4 publications que ses travaux commencent à être reconnus, en 1878.

Comme Cornu l'a mentionné : « [...] des résistances importantes dans le développement historique d'une notion mathématique sont souvent des symptômes de difficultés sérieuses, souvent intrinsèques à la notion elle-même. » (Cornu cité par LAJOIE, 2000, p. 71) On remarque, dans le développement du concept de groupe, qu'il faut près de 40 ans pour que les idées de Galois soient reconnues et encore 30 ans de plus pour celles de Cayley. La communauté mathématique avait une réticence évidente face à une théorie complètement déconnectée d'application potentielle. Klein, en 1880, reconnaît que les formulations abstraites allègent la rédaction de preuves. Par contre, il est convaincu « qu'elles rendent la vie difficile aux étudiants, car elles ne permettent pas de voir comment on est arrivé à ces définitions. » (Klein cité par LAJOIE, 2000, p. 70)

Ces réticences sont une piste de réflexion pour identifier certaines difficultés. En effet, dans les cours d'introduction aux structures algébriques, le concept de groupe est introduit par une définition similaire à celle énoncée ci-dessous (CHAPDELAINE, 2014 ; LEI, 2016 ; CORTELLA, 2011). En suit une liste d'exemples « classiques » comme  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  et  $(\text{Sym}(S), \circ)$ .

**Définition 2.1.** *Soit  $G$ , un ensemble, et  $*$  :  $G \times G \rightarrow G$ , une opération binaire fermée sur l'ensemble. On définit  $(G, *)$  comme un groupe si  $*$  satisfait les 3 axiomes suivants :*

1. *Élément neutre :  $\exists e \in G, \forall g \in G$ , tel que  $e \cdot g = g \cdot e = g$*
2. *Inverse :  $\forall g \in G, \exists g' \in G$ , tel que  $g \cdot g' = g' \cdot g = e$*
3. *Associativité :  $\forall g \in G, \forall f \in G, \forall h \in G$ ,  $g \cdot (f \cdot h) = (g \cdot f) \cdot h$*

En comparant cette façon de présenter le concept de groupe au développement historique du concept, on peut immédiatement faire le lien avec les propos de Klein

en observant comment les étudiants sont directement exposés à la version générale ou abstraite du concept de groupe. Cette façon de présenter le concept de groupe ne permet pas aux étudiants de développer une intuition ou encore de trouver une nécessité au concept. Tel que présenté plus tôt, le concept de groupe s'est développé à travers l'étude de la théorie des équations, puis des transformations géométriques et des isométries. Si l'intention des exemples est d'engendrer l'intuition de groupe, alors le choix des exemples est critique. Les groupes de nombres ne sont peut-être pas les groupes porteurs du plus d'intuition. L'utilisation des groupes de nombres comme exemples dans les cours d'algèbre est étudiée de façon plus détaillée dans la deuxième partie du présent essai.

### **2.3 Difficultés liées aux premiers apprentissages de la théorie des groupes**

La synthèse historique réalisée par Caroline Lajoie donne plusieurs indices quant à des difficultés surtout en comparant avec les méthodes actuelles d'introduction du concept. Les recherches de Lajoie sont quant à elles profitables pour le présent essai en identifiant 14 difficultés relatives à certains concepts élémentaires de théorie des groupes. La chercheuse a interviewé 10 étudiants de premier cycle universitaire ayant suivi au moins un cours d'introduction aux structures algébriques. Sa recherche se limite à 4 concepts : les groupes, les isomorphismes, les sous-groupes et les groupes cycliques.

Avant de lister les difficultés, il est pertinent de s'arrêter au sens attribué au mot « difficulté ». Plusieurs distinctions peuvent être faites reflétant le caractère interne ou externe d'une difficulté. Une difficulté *intrinsèque* réfère au caractère de ce qui est difficile : complexité, subtilité, obstacle ou barrière, alors qu'une difficulté *extrinsèque* renvoie à un embarras ou une gêne face à une situation : une difficulté à comprendre. La chercheuse utilise ces deux points de vue complémentaires pour son étude des premiers apprentissages de concepts de théorie des groupes. Les difficultés identifiées par Lajoie sont identifiées ci-dessous. Certaines seront présentées de façon plus détaillée par la suite.

## Groupe

1. Difficulté à discerner les propriétés essentielles des groupes (délimiter des conditions pour être un groupe).
2. Difficulté à reconnaître que l'élément neutre dans un groupe de classes résiduelles puisse être autre chose que  $[1]$  ou  $[0]$ .
3. Difficulté à considérer les transformations géométriques comme les éléments d'un groupe.
4. Difficulté à concevoir les groupes présentés de façon abstraite autrement qu'en terme de groupes numériques.

## Isomorphisme de groupe

5. Difficulté à donner à l'idée que des groupes isomorphes sont des groupes semblables, l'interprétation que lui donnent les experts.
6. Difficulté à montrer formellement que deux groupes sont isomorphes (même dans les cas les plus simples.)
7. Difficulté à considérer plus d'un isomorphisme possible entre deux groupes isomorphes.
8. Difficulté à voir l'isomorphisme à la fois comme une relation d'équivalence sur les groupes et comme une correspondance particulière entre deux groupes isomorphes.
9. Difficulté à reconnaître une utilité au concept d'isomorphisme en mathématiques.

## Sous-groupe

10. Difficulté à discerner les propriétés essentielles des sous-groupes (ou délimiter un ensemble de conditions permettant de définir un sous-groupe).
11. Difficulté à construire un sous-groupe cyclique infini.
12. Difficulté à établir une relation entre l'ordre d'un groupe et l'ordre de ses sous-groupes et entre l'ordre d'un groupe et l'ordre de ses éléments.
13. Difficulté à traiter l'isomorphisme entre deux groupes dont l'un est le sous-groupe strict de l'autre.

## Groupes cycliques

14. Difficulté à considérer qu'un groupe infini puisse être cyclique.

*Première difficulté : Difficulté à discerner les propriétés essentielles des groupes (délimiter des conditions pour être un groupe).*

Lajoie observe chez seulement quatre des dix étudiants la capacité d'identifier les critères nécessaires pour être un groupe. Parmi eux, trois hésitent à savoir quelles sont les caractéristiques essentielles pour être un groupe. Les autres étudiants oublient au moins une caractéristique, principalement l'associativité, ou ont beaucoup de mal à se souvenir quelle est la définition de groupe.

Une explication potentielle de cette difficulté se trouve à même la formulation de la définition de groupe. On a présenté le concept de groupe aux étudiants avec une définition très semblable à celle énoncée à la section 2.2 (voir définition 2.1), soit un ensemble muni d'une loi de composition respectant trois axiomes. Dans le processus de rappel de ce qu'est un groupe, les étudiants sont à la recherche de trois critères. Ils sont conscients de l'importance de la fermeture de l'opération sur l'ensemble, car ils ont eu à en vérifier la présence de nombreuses fois. On peut ainsi comprendre que pour plusieurs étudiants la fermeture devient l'un des axiomes à respecter. À l'opposé, l'associativité est souvent déductible de l'opération. Elle est même parfois évidente, par exemple lorsque l'opération est la multiplication ou l'addition.

Historiquement, un groupe était défini comme un ensemble de symboles tel que la combinaison de n'importe quels deux symboles reste dans l'ensemble (définition de Cayley). L'existence de l'inverse, de l'identité et de l'associativité a été ajoutée bien plus tard à la définition de groupe. Les systèmes manipulés par les mathématiciens possédaient toutes ces caractéristiques, donc pour être un groupe ils avaient seulement besoin de la fermeture de l'opération sur l'ensemble. De la même façon, les étudiants manipulent principalement des systèmes de nombres, ainsi, ils n'ont pas besoin de vérifier l'associativité puisqu'elle est gratuite. Aussi, lorsqu'un étudiant veut vérifier si un ensemble est un sous-groupe, ce n'est pas nécessaire de vérifier l'associativité

puisqu'elle y est directement. Ainsi, dans le contexte d'étude du concept de groupe, plusieurs facteurs peuvent contribuer à l'oubli de l'associativité comme axiome de groupe.

*Deuxième difficulté : Difficulté à reconnaître que l'élément neutre dans un groupe de classes résiduelles puisse être autre chose que [1] ou [0].*

Lajoie a pu identifier cette difficulté à travers une tâche où les étudiants devaient déterminer si  $(G_3, \cdot)$  est un groupe : où  $G_3 = [2], [4], [6], [8] \in \mathbb{Z}_{10}$  et où  $\cdot$  est la multiplication. La majorité des étudiants est convaincue que ce n'est pas un groupe pour une part considérable de l'entrevue. En effet, dès que les étudiants remarquaient que ni la classe [0], ni la classe [1] est présente, ils rejetaient immédiatement la possibilité que  $G_3$  puisse être un groupe en étant convaincus que  $G_3$  n'avait pas d'élément neutre. Dans certains cas, leur opinion a évolué au cours de l'entretien.

Lajoie explique cette difficulté par le fait que ce soit un groupe inhabituel, mais soulève surtout que : « pour la majorité des participants [...] tout fonctionne comme si l'élément neutre était déterminé d'avance, soit par l'opération définie sur l'ensemble, soit par le type d'éléments. » (LAJOIE, 2000, p. 124) L'élément neutre de l'addition et de la multiplication, soit 0 et 1 respectivement, ne sont pas présents dans  $G_3$ . Il s'agit d'un groupe de nombres, alors les étudiants excluent la possibilité que l'élément neutre soit autre chose.

Encore une fois, il est possible de faire un lien avec la méthode de présentation du concept de groupe. Les exemples avec lesquels les étudiants ont développé leur compréhension sont principalement des exemples numériques classiques. Leur expérience leur permet donc de conclure que l'identité est presque toujours 1. Ce qui renforce encore cette croyance est le fait qu'on représente souvent l'identité des groupes de transformations par « 1 ».

*Troisième difficulté : Difficulté à considérer les transformations géométriques comme les éléments d'un groupe.*

Cette difficulté a été observée lorsque les étudiants ont eu à déterminer si  $G_2$  et  $G_4$  étaient des groupes. On a défini  $G_2$  comme étant l'ensemble des trois réflexions du triangle équilatéral muni de la loi de composition et  $G_4$  étant l'ensemble des symétries du rectangle non carré muni de la loi de composition.

Les participants ne cachent pas leur malaise face à des groupes de transformations et la moitié d'entre eux n'arrivent pas à considérer les transformations comme les éléments du groupe. Ils sont préoccupés par le fait que la figure revient toujours sur elle-même et sur la position des sommets. Quant à ceux qui parviennent à manipuler ces groupes, ils le font en abordant le problème de façon abstraite, c'est-à-dire en considérant les transformations comme des permutations des sommets.

Les groupes de transformations sont un système de deux ensembles : les sommets sur lesquels le système opère et l'ensemble des transformations possibles : identité, réflexion horizontale ou verticale et la combinaison de ces réflexions. Il s'agit aussi d'un système à deux opérations : les transformations géométriques elles-mêmes et la composition de transformations.

Les étudiants qui manipulent ce système en considérant les transformations comme des permutations n'ont pas de difficultés, ainsi, on peut se questionner à savoir si la difficulté est intrinsèque aux transformations géométriques. Celles-ci sont abordées tôt à l'école primaire et manipulées tout au long de leur parcours scolaire en tant qu'actions. Une explication possible de la difficulté identifiée par la chercheuse est que les étudiants sont habitués de manipuler les transformations géométriques comme des actions, des opérations. Il y a donc une grande résistance lorsqu'il vient le temps de les considérer comme des éléments sur lesquels on peut appliquer une opération.

*Quatrième difficulté : Difficulté à concevoir les groupes présentés de façon abstraite autrement qu'en terme de groupes numériques.*

L'identification de cette difficulté découle du questionnement des étudiants, lorsque confrontés à un groupe  $G$ . Les étudiants sont très influencés par les groupes de

nombres. Ils sont convaincus que ce serait plus facile, c'est-à-dire qu'ils auraient moins de mal à répondre aux questions, si les lettres (éléments du groupe) avaient été des nombres. Une majorité veut savoir si les éléments sont des nombres ou s'il peut s'agir de n'importe quoi. Ils veulent savoir si l'opération est la multiplication et agissent toute l'entrevue comme si ça l'était sans avoir eu de confirmation de la part de la chercheuse. Celle-ci s'attendait à avoir des questions sur la nature de la loi de composition et sur les façons de composer les éléments, mais toutes les questions ont été très orientées par la familiarité des étudiants avec les groupes de nombres.

L'attention des étudiants centrée sur la nature des éléments peut être justifiée par le fait que, pour les étudiants, le groupe  $G$  est une façon de représenter abstraitement un groupe donné plutôt qu'un représentant d'une classe d'isomorphisme.

*Cinquième difficulté : Difficulté à donner à l'idée que des groupes isomorphes sont des groupes semblables l'interprétation que lui donnent les experts.*

Les experts utilisent parfois le terme « semblable » pour qualifier des groupes isomorphes. On peut remarquer que les étudiants utilisent, pour la plupart, aussi cette idée que les groupes doivent être semblables. Par contre, la ressemblance recherchée par les étudiants tentant d'identifier si deux groupes sont isomorphes est extérieure. Ils tentent de trouver une similarité entre les éléments, la nature de la loi de composition, l'ordre des éléments ou l'ordre des groupes. D'autres disent des groupes isomorphes qu'ils sont équivalents. Sans être capables de développer leur idée, ils se contentent de dire que les groupes ont le même nombre d'éléments.

Il y a plusieurs pistes d'explication pour justifier cette difficulté. On remarque que les étudiants savent que des groupes isomorphes se ressemblent, mais cette idée n'a pas été intériorisée. En effet, lorsqu'ils se mettent à l'exploiter, les étudiants s'en remettent aux ressemblances qu'ils sont capables d'observer, ce qui n'est pas suffisant pour montrer l'isomorphisme. Certains étudiants établissent une bijection entre les éléments des deux groupes pour montrer l'isomorphisme. Cela constitue une stratégie efficace, cependant les étudiants ne prennent pas en compte que la correspondance

doit aussi être entre les opérations.

Plusieurs utilisent l'idée qu'il doit y avoir une correspondance dans l'ordre des éléments. On remarque que cette idée est souvent utilisée pour trouver une contradiction. Il s'agit d'une procédure que les étudiants connaissent bien, ainsi il est prévisible qu'ils s'y ramènent et tentent de l'adapter. En effet, l'isomorphisme de groupes implique que les éléments sont de même ordre, mais l'implication réciproque n'est pas vraie. Avoir des éléments de même ordre n'implique pas que les groupes sont isomorphes. Ainsi, on peut conclure que les étudiants n'arrivent pas à voir l'isomorphisme comme une conservation de toute la structure de groupe.

*Sixième difficulté : Difficulté à montrer formellement que deux groupes sont isomorphes (même dans les cas les plus simples.)*

Cette difficulté a été identifiée lorsque les étudiants devaient déterminer si  $G_3$  et  $G_4$  sont isomorphes. On se rappelle que  $G_4$  est défini l'ensemble des symétries du rectangle non carré muni de la loi de composition et que  $(G_3, \cdot)$ , où  $G_1 = [2], [4], [6], [8] \in \mathbb{Z}_{10}$  et où  $\cdot$  est la multiplication.

Cette tâche s'est avérée très difficile. Les étudiants ne savaient ni quand ni comment construire un isomorphisme. Une question de l'entrevue demandait aux étudiants d'identifier des conseils qu'ils donneraient à des étudiants débutants. Beaucoup n'étaient pas capables d'identifier de conseils sinon de regarder la cardinalité des groupes. La majorité des étudiants n'ont pas pu énoncer la définition formelle de groupes isomorphes.

On rappelle que deux groupes isomorphes « sont des groupes semblables, presque identiques, et devant deux groupes donnés, il faut, pour se convaincre qu'ils sont isomorphes, établir une correspondance biunivoque qui montre que leurs opérations sont équivalentes. » (LAJOIE, 2000, p. 162)



Encore une fois, les étudiants n'ont pas démontré d'intuition lorsque présentés à ce style de tâche ; plusieurs tentent de trouver une contradiction, d'autres d'utiliser les ressemblances qu'ils arrivent à observer. Beaucoup d'étudiants abandonnent rapidement face à cette tâche. On observe que la définition formelle n'a pas été intériorisée. Elle n'a pas été associée à une structure cognitive qui contiendrait les images, les propriétés et les procédures associées au concept d'isomorphisme qui en rendrait la manipulation plus facile. Lajoie, à travers ses entrevues, remarque de la confusion dans certains concepts relatifs au concept d'isomorphisme, soit principalement la bijection, l'injection, la surjection, mais surtout la notion de fonction. Elle propose qu'une explication de cette difficulté se trouve dans la conception de la fonction des étudiants, plusieurs fois perçue comme une « formule ».

*Septième difficulté : Difficulté à considérer plus d'un isomorphisme possible entre deux groupes isomorphes.*

Seulement trois des 10 étudiants ont réussi à répondre à la question précédente. Ainsi, seulement trois étudiants ont pu tenter de trouver un deuxième isomorphisme entre les groupes  $G_3$  et  $G_4$ . Aucun des trois n'a répondu à la question avec une grande assurance et un conclut que l'isomorphisme entre deux groupes est unique. Pour les autres, ils se convainquent de l'existence d'un deuxième isomorphisme seulement après avoir réussi à en trouver un.

On peut expliquer cette difficulté par le fait que les étudiants se basent sur la correspondance naturelle des éléments des deux groupes. Une correspondance naturelle ou intuitive est nécessairement unique.

*Huitième difficulté : Difficulté à reconnaître une utilité au concept d'isomorphisme.*

La majorité des étudiants n'ont pas recours au concept d'isomorphisme par eux-mêmes, même dans les situations où on leur demande de déterminer si deux groupes sont isomorphes. Cependant, on remarque que plusieurs étudiants donnent l'impression d'utiliser l'isomorphisme de façon inconsciente lorsqu'ils manipulent certains groupes. Lorsque Lajoie demande aux étudiants à quoi sert l'isomorphisme, plusieurs

n'y voient aucune utilité. D'autres lui confèrent une utilité très limitée ou erronée et seulement deux étudiants voient l'isomorphisme comme pouvant ramener un groupe « complexe » à un groupe plus simple, en précisant qu'ils n'utilisent pas ce concept souvent, ni dans la vie quotidienne, ni dans leur cours d'algèbre.

Il est possible d'attribuer l'absence d'utilité du concept tel que perçu par les étudiants à une mauvaise compréhension du concept qui nuit aux possibilités d'utilisation. De plus, toutes les autres difficultés liées aux concepts de groupes et d'isomorphisme empêchent les étudiants de voir toutes les similarités entre les groupes. Cela engendre une compartimentation des différents concepts qui nuit grandement au développement de la compréhension des étudiants.

*Dixième difficulté : Difficulté à discerner les propriétés essentielles des sous-groupes (ou délimiter un ensemble de conditions permettant de définir un sous-groupe.)*

Lors de l'interview, la chercheuse demande aux étudiants de donner la définition de sous-groupe et d'utiliser les critères qu'ils ont appris afin de déterminer si l'exemple qu'on leur présente est un sous-groupe. De façon générale, les étudiants ont bien assimilé le fait que les éléments du sous-groupe forment un sous-ensemble des éléments du groupe. Cette assimilation généralisée pour cette partie du concept de sous-groupe peut être expliquée par la similarité de terminologie entre groupe et sous-groupe et entre ensemble et sous-ensemble.

L'idée de sous-groupe est souvent comprise comme un groupe inclus dans un autre. Cette perception de la structure de sous-groupe est viable lorsque la loi de composition est évidente. Cependant, c'est avec le comportement de la loi de composition que plusieurs ont du mal. En effet, de façon générale il y a une absence de relation entre la loi définie dans le groupe et celle définie dans le sous-groupe. Ainsi, le malaise des étudiants face aux critères peut découler de leur manque d'intuition.

*Douzième difficulté : Difficulté à établir une relation entre l'ordre d'un groupe et l'ordre de ses sous-groupes et entre l'ordre d'un groupe et l'ordre de ses éléments.*

L'identification d'ordres s'est avérée être une tâche très difficile pour une majorité des étudiants rencontrés. Ceux-ci ne savent pas quelles sont les relations entre les notions d'ordre de groupe, de sous-groupe et l'ordre un élément donné. En effet, pour établir la relation entre ces ordres, il faut être en mesure de voir l'ordre d'un élément comme l'ordre du sous-groupe qu'il engendre. Beaucoup d'étudiants éprouvent des difficultés à en énoncer une définition, à voir les liens entre les ordres de groupe et de sous-groupe ou encore à trouver l'ordre d'un élément donné.

On peut expliquer cette difficulté par le fait que les étudiants n'ont pas intégré la notion d'ordre à leur schéma du concept de groupe. Ils n'ont pas assimilé de procédure appropriée pour déterminer l'ordre. De plus, le mot « ordre » peut porter à confusion surtout si la relation entre les différents ordres n'a pas été acquise.

### 3 Cadre théorique

Un des objectifs du présent essai est d'identifier les contributions potentielles de différents outils. Un cadre théorique décrivant le processus de construction et d'apprentissage est particulièrement utile pour l'analyse des différents outils présentés en deuxième partie. Ainsi, le cadre théorique développé par Dubinsky, APOS theory (DUBINSKY, 1991), est utilisé comme référence pour cet essai. Une brève présentation de cette théorie est faite dans cette section. Il est largement utilisé dans la littérature. Dubinsky a entrepris d'élargir aux mathématiques avancées les travaux de Piaget sur l'abstraction. Son développement s'est fait à partir de l'hypothèse que l'individu, pour gérer des problèmes mathématiques, construit des actions, des processus et des objets internes qui sont organisés dans des schémas. Ses composantes se portent bien à l'analyse présentée dans la deuxième partie. Cette théorie est applicable à beaucoup de concepts mathématiques et la terminologie est assez simple, donc idéale pour la communication.

#### 3.1 Théorie APOS

Piaget présente trois types d'abstractions. L'abstraction **empirique** est définie comme le processus par lequel l'individu tire des connaissances à partir des propriétés des

objets manipulés. Ce processus est externe, mais les connaissances qui en découlent sont, elles, internes à l'individu. L'abstraction **pseudo-empirique** est définie comme intermédiaire à l'abstraction empirique et l'abstraction réfléchissante. Il s'agit du processus par lequel l'individu extrait une propriété grâce à une action appliquée sur l'objet.

Finalement, l'abstraction **réfléchissante** est celle à la base des travaux de Dubinsky. On la définit comme le processus par lequel l'individu tire des connaissances grâce à une coordination d'actions dont la source est complètement interne à l'individu. Piaget considère que c'est l'abstraction réfléchissante dans sa forme la plus avancée qui dirige vers le genre de raisonnement mathématique par lequel la forme ou le processus est séparé du contenu et que les « processus » deviennent, dans l'esprit des mathématiciens, des objets de contenu (DUBINSKY, 1991, p. 98).

La théorie APOS, porte son nom d'après ses quatre principales composantes : actions, processus, objets et schémas. L'auteur définit le concept d'**action** comme étant la transformation d'un objet essentiellement externe. Une action suit des instructions par étape bien mémorisées. On décrit souvent l'action comme procédurale. Par exemple, un individu qui considère la composition de fonction comme « remplacer le  $x$  par une formule » a une compréhension action de la composition.

Une fois que l'action a été faite un nombre substantiel de fois, l'individu se crée une représentation interne de l'action sur laquelle il peut maintenant réfléchir. Le résultat de cette internalisation est défini comme étant un **processus**. En reprenant l'exemple de composition de fonctions, si l'individu considère maintenant la composition de fonctions plutôt comme une coordination de deux équations dont il faut faire correspondre les variables, alors il est passé à une conception processus de la composition.

Ensuite, lorsqu'un processus est conscient et que l'individu sait comment il peut le manipuler, alors on parle d'**objet**. L'individu qui sait distinguer la composition de

fonction (une fonction appliquée à une fonction) de la transformation qui en résulte (une fonction de fonction) a maintenant une conception objet.

Finalement, le **schéma** est la structure cognitive associée au concept qui inclut toutes les images mentales, les propriétés et les processus associés au concept (voir la figure 1). En d'autres mots, le schéma représente les actions, les processus, les objets et les autres schémas qui, ensembles, forment la conception personnelle d'un concept.

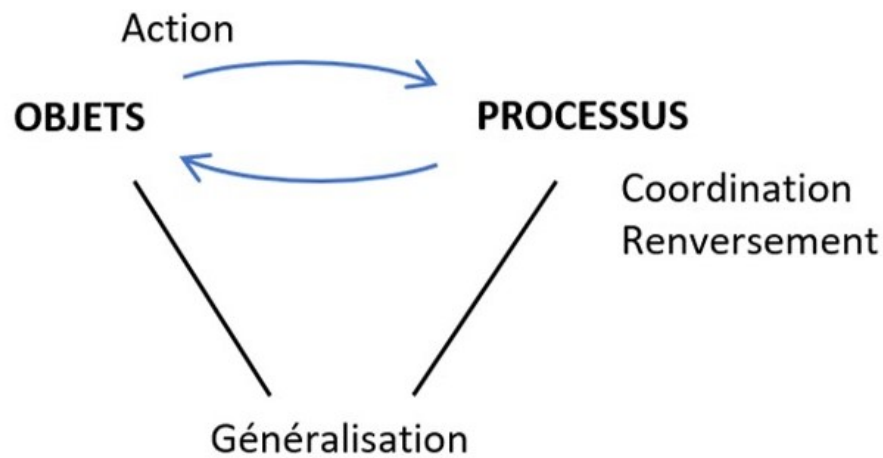


FIGURE 1 – Construction d'un schéma (DUBINSKY, 1991, p.107).

Les composantes ont été présentées dans un ordre qui sous-entend une interdépendance. De façon générale, chaque conception de la liste est nécessaire pour la construction de la conception suivante. Dans la réalité, la construction des concepts n'est pas aussi linéaire. Il n'est pas rare de voir des étudiants faire de nombreux allers-retours entre la conception action et la conception processus avant de passer à une conception objet.

La théorie APOS a été développée de façon à pouvoir construire la décomposition génétique, c'est-à-dire une description détaillée des actions, processus, objets et schémas construits par un individu lors de l'acquisition d'un concept donné. Avec cette décomposition, on peut par exemple comparer les différences de compréhension d'un individu à l'autre pour le même concept et ainsi avoir des pistes d'explications de la raison pour laquelle un individu parvient à aller un peu plus loin dans l'utilisation

d'un concept.

Quoique très intéressantes, les descriptions génétiques ne sont pas la raison pour laquelle la théorie APOS est utilisée dans cet essai. En effet, aucune analyse de compréhension d'étudiant n'est effectuée. Par contre, la terminologie développée sera utile pour présenter les motivations de construction de certains concepts par plusieurs ressources, notamment dans le livre de Nathan Carter.

### 3.2 Réduction d'abstraction

Orit Hassan est professeure associée au département d'éducation en science et technologie de Technion University en Israël. Ayant réalisé de nombreuses recherches sur l'enseignement de la théorie des groupes, son article Reducing abstraction level when learning abstract algebra concept (HAZZAN, 1999) présente plusieurs stratégies utilisées par les étudiants.

Ses recherches montrent que bien que la réduction d'abstraction soit une stratégie efficace, elle peut aussi être utilisée de façon inappropriée ou engendrer certaines erreurs selon l'utilisation qu'on en fait. Pour cet article, Hazzan a interviewé 9 étudiants. Tous suivaient un cours classique d'algèbre, c'est-à-dire un cours « théorème-preuve-exemple » au moment de l'entrevue. La chercheuse s'est concentrée sur 5 sujets fondamentaux : les groupes, les sous-groupes, les classes, le théorème de Lagrange et les groupes quotients. Elle est parvenue à identifier trois méthodes de réduction d'abstraction qui peuvent engendrer quelques mauvaises associations. Elle distingue ces différentes méthodes par le genre d'abstraction que les étudiants tentent de réduire.

D'une part, on peut définir le niveau d'abstraction comme la qualité de la relation entre la personne pensant et l'objet de pensée. Le fait qu'un concept est abstrait ou concret n'est pas une propriété de l'objet, mais plutôt de la relation entre l'objet de pensée et la personne qui pense. Plus l'expérience d'une personne avec un concept est grande, plus elle peut faire des liens avec d'autres concepts et plus il lui paraît concret.

Avec cette vision, on peut remarquer que les étudiants qui tentent de se représenter un concept abstrait de façon plus concrète utilisent une méthode pour réduire ce type d'abstraction. On peut traduire cette idée comme chercher un visage familier dans une foule inconnue. De la même façon qu'on tente de trouver un point de départ connu, lorsque submergé de nouvelles informations, les étudiants se basent sur des groupes qu'ils connaissent bien pour baser leur argumentation à propos de groupes  $(G, \cdot)$  abstraits.

Les étudiants ont pu développer une familiarité avec les groupes de nombres dans leur cours d'algèbre. Même s'ils ont été exposés à d'autres exemples de groupes et qu'ils devraient être en mesure de savoir que ceux-ci ont plusieurs propriétés non généralisables, les étudiants continuent d'agir comme si les règles pour agir avec des nombres étaient universelles. Tel que mentionné plus tôt, les groupes de nombres ont plusieurs belles propriétés, par exemple la commutativité, ou le fait que ses éléments sont ordonnés  $1 < 2 < 3 \dots$ . Ces propriétés ne sont pas présentes dans tous les groupes, et doivent être démontrées pour être utilisées.

Ensuite, on peut voir le niveau d'abstraction comme une réflexion de la dualité processus-objet, telle que définie dans le cadre de la théorie APOS. En utilisant la terminologie développée par Dubinsky, on se concentre ici sur le passage d'une conception dynamique (processus) à une conception statique (objet). Plus on travaillera avec un concept non familier en le considérant comme dynamique ou comme un processus, plus ce concept devient familier, ancré, donc un objet.

On peut observer les étudiants remplacer des expressions formelles par des expressions familières. Par exemple, un individu peut remplacer «il existe. . . » par «je peux trouver. . . ». On remarque aussi que même les étudiants qui ont une conception avancée d'un concept font de la résolution procédurale. On peut voir ce comportement lorsqu'on demande à un étudiant de résoudre une situation pour laquelle il a une méthode de résolution de mémorisée. Même s'il a des informations supplémentaires qui rendent certaines étapes non nécessaires, il fera tout de même chacune des étapes

de résolutions habituelles.

De plus, le niveau d'abstraction peut être le degré de complexité du concept de pensée. En effet, plus le concept a de composantes, plus celui-ci paraîtra abstrait pour les étudiants. Par exemple, un groupe dont les éléments sont des groupes sera plus abstrait qu'un groupe en particulier. Lorsque placé dans une situation dont le degré de complexité de l'objet à manipuler est élevé, les étudiants vont avoir tendance à le remplacer par un représentant plus simple : dans le cas d'un groupe dont les éléments sont des groupes, l'étudiant pourrait choisir un de ces éléments en particulier et seulement considérer celui-ci dans son raisonnement.

On peut expliquer ce phénomène par le fait que les étudiants ayant une conception processus seront portés à manipuler les éléments plutôt que les ensembles, n'ayant intériorisé que les actions appliquées sur les éléments, mais pas encore le comportement de ceux-ci. Il s'agit d'une méthode de réduction d'abstraction efficace, surtout lorsque la compréhension du concept est encore en développement. Cependant, beaucoup d'étudiants oublient qu'ils doivent ensuite être en mesure de généraliser leurs observations.

### 3.3 Conclusion

Les ressources présentées dans les sections précédentes proposent différentes approches pour aborder la compréhension étudiante de notions de théorie des groupes. Ainsi, l'analyse historique du développement de la théorie des groupes et la liste de difficultés réalisées par Lajoie permettent d'identifier certaines sources d'erreurs à même les choix de stratégies d'enseignement. De plus, l'analyse qui a mené à l'identification de certaines difficultés contribue à identifier des pistes de façons pour contourner ces difficultés. Ensuite, le travail de Dubinsky sur la théorie de l'abstraction de Piaget permet de préciser le genre de raisonnement nécessaire dans l'apprentissage de ce domaine : par exemple être capable de manipuler l'objet « groupe » sans toujours devoir se ramener à une compréhension action. Finalement, le travail d'Hazzan sur les méthodes employées pour réduire l'abstraction permet de prendre conscience de



certaines erreurs classiques.

L'objectif de cette première partie était d'élaborer une grille de critères d'observation afin de décrire la potentielle contribution d'outils, visuels pour la plupart, qui sont présentés dans la deuxième partie. Les travaux de Caroline Lajoie sont centraux pour cette partie. En effet, ils constituent le fil conducteur de l'analyse réalisée en concentrant celle-ci sur les concepts que la chercheuse a abordés.

### **Grille d'observation**

1. Comment l'outil est-il introduit ?
2. Quels sont les applications ou les liens potentiels avec d'autres concepts ?
3. Comment cela répond-il aux difficultés identifiées par Lajoie et Hazzan ?

## Deuxième partie

Plusieurs chercheurs et enseignants se sont penchés sur l'enseignement de la théorie des groupes et ont proposé des approches différentes sans toutefois être complètement déconnectées de ce qui est fait dans les cours classiques. L'objectif de cette section est de mettre à l'épreuve les critères d'observations développés dans la section précédente, mais surtout de décrire comment ces approches alternatives peuvent répondre aux difficultés identifiées par Lajoie et Hazzan. Ainsi, une attention particulière est portée sur les motivations des choix d'écriture de l'auteur : du ton, de la séquence d'introduction et des exemples utilisés.

### 4 Visual Group Theory (Carter)

Dès un premier survol du livre de Nathan Carter (CARTER, 2009), le contenu se démarque par la séquence d'introduction de concepts très différente de celles qu'il est possible d'observer dans des cours classiques. Cette sous-section présente une analyse comparative de certains choix de séquences et s'attarde principalement à l'impact qu'une séquence peut avoir sur l'apprentissage des étudiants. Les difficultés identifiées par Lajoie ont été observées chez des étudiants ayant suivi un cours classique. De plus, plusieurs difficultés identifiées par Lajoie sont externes et donc reliées aux contextes dans lesquels l'apprentissage du concept est réalisé. L'externalité des difficultés implique donc que la séquence pédagogique utilisée pour enseigner les concepts peut avoir un impact sur la compréhension des étudiants. Ainsi, la sous-section ci-dessous présente comment une séquence différente pourrait éventuellement contourner certaines de ces difficultés.

#### 4.1 Analyse comparative de séquences pédagogiques

Lorsque vient le temps de choisir la structure d'un cours, l'ordre d'introduction de certains concepts s'impose. Par exemple, il est implicite que les groupes seront abordés avant les sous-groupes, ou que la notion d'ordre sera abordée avant le théorème de Lagrange, ces concepts étant fortement liés entre eux. Cependant, l'ordre de présentation n'est pas aussi évident pour d'autres concepts ; l'ordre de présentation des

générateurs, des groupes cycliques et des tables de multiplication est déjà beaucoup moins clair.

Les professeurs d’algèbre sont portés à déconstruire le contenu du haut vers le bas pour choisir la structure de leurs cours. On peut voir cette façon de structurer le cours comme pyramidale, c’est-à-dire qu’ils partent des « beaux » résultats à démontrer et identifient les concepts qui doivent être acquis pour y parvenir, puis répètent ce processus jusqu’à ce qu’ils se rendent aux concepts élémentaires du champ d’étude (voir la Figure 2).

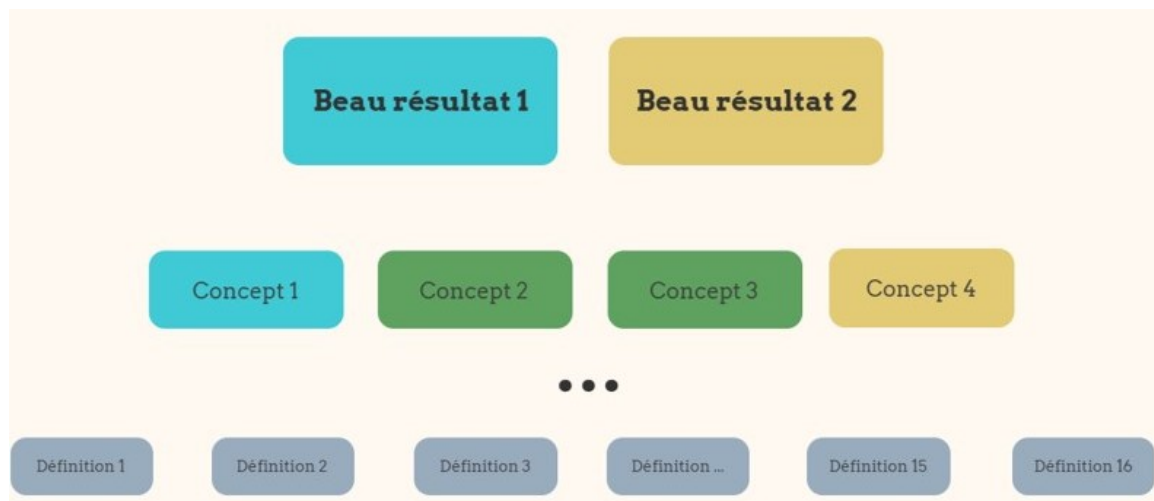


FIGURE 2 – Construction de cours d’algèbre classique.

Une fois la décomposition réalisée, la séquence la plus utilisée est une remontée de la pyramide. Dans l’exemple de la Figure 2, cela consisterait à présenter les définitions 1 à 16, en alternance avec les concepts lorsque les préalables ont été présentés et finalement les « beaux » résultats. Dans un cours d’introduction à la théorie des groupes, les « beaux » résultats en question sont souvent le théorème de Lagrange et les trois théorèmes d’isomorphismes. L’ordre de présentation des concepts est strictement logique et la séquence choisie est une voie directe vers la démonstration des résultats recherchés.

Les choix de séquences utilisées par Carter s’apparentent difficilement à une remontée

de décomposition pyramidale comme pour les cours classiques. Dès le début du livre, l'objectif est clair : l'auteur veut familiariser le lecteur à l'algèbre. Ainsi, il porte une attention particulière aux liens entre les différents concepts de façon à développer une compréhension globale solide des concepts de base du domaine. La structure de séquence d'introduction est présentée dans la Figure 3. L'objectif final n'est donc pas certains théorèmes ou résultats, mais plutôt de construire une compréhension globale solide que le lecteur pourra réutiliser par la suite.

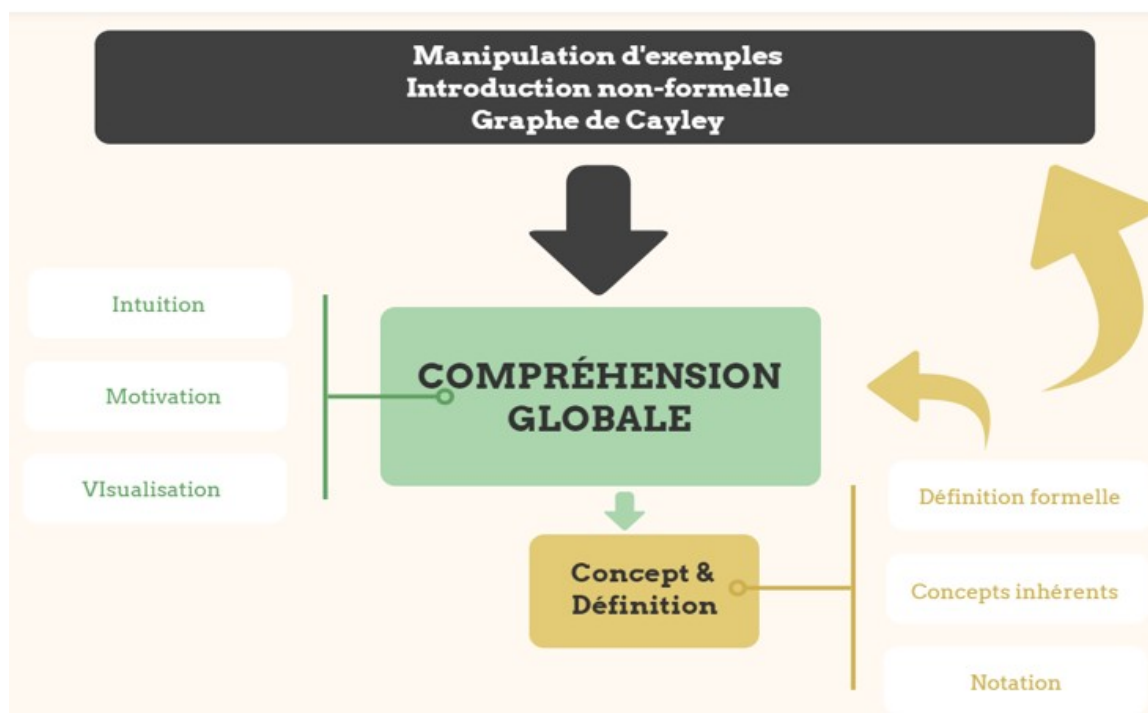


FIGURE 3 – Structure de la séquence d'introduction de Carter.

## 4.2 Impact de la construction de Carter sur les difficultés identifiées par Lajoie

Les cours de deux enseignants d'algèbre de l'Université Laval ont été choisis afin de comparer leur séquence d'introduction avec celle élaborée par Carter. Une synthèse de cette analyse comparative est présentée dans la figure 4. Les trois grandes différences entre ces séquences sont liées au concept de groupe, de sous-groupe et d'homomorphisme.

Cours 1	Cours 2	Livre de Carter
$\emptyset$	$\emptyset$	Concept de groupe <b>Générateurs</b> Idée de symétrie Diagramme de Cayley Isomorphisme : idée via des graphes de Cayley de structure semblable Pourquoi étudier les groupes Table de multiplication
<b>DÉFINITION FORMELLE DE GROUPE</b>		
Exemples de groupes Propriétés de groupes Semi-groupe	Exemples de groupes Propriétés de groupes	<b>Groupe cyclique</b> Ordre d'un groupe Orbites Groupes abéliens Groupes diédraux Groupes symétriques Groupes alternés Théorème de Cayley Régularité
<b>DÉFINITION FORMELLE DE SOUS-GROUPE</b>		
Groupe engendré Centre de groupe Centralisateur <b>Groupe cyclique</b> <b>Générateurs</b> Ensembles générateurs Groupe symétrique Groupe diédral Signature de groupe Groupe alterné Classes	Groupe engendré Ordre de groupe <b>Groupe cyclique</b> Ordre d'un élément <b>Générateurs</b> Groupe non abélien Groupe symétrique	Classes
<b>THÉORÈME DE LAGRANGE</b>		
$\emptyset$	Relation d'équivalence	Sous-groupes normaux Produit direct Produit semi-direct Groupe quotient Conjugaison
<b>HOMOMORPHISME</b>		

FIGURE 4 – Analyse comparative de différentes séquences d'introduction.

Il est possible de remarquer l'absence de notions présentées préalablement à la définition formelle de groupe dans le cas des cours 1 et 2. À l'opposé, Carter lui utilise plutôt une séquence qui comprend plusieurs notions avant de présenter la définition formelle de groupe. La séquence développée par Carter nécessite l'idée de structure algébrique et de symétrie. Ces idées sont toutes les deux absentes du début des cours 1 et 2; et, pourtant, sont directement liées à celle de groupe. Ainsi, avant d'énoncer une définition formelle du concept de groupe, Carter inclut l'exploration d'un exemple et aborde déjà les générateurs afin de développer l'intuition de structure de groupe. Carter inclut aussi une motivation de l'étude de cette théorie en développant l'idée de symétrie, en présentant des représentations visuelles et en incluant plusieurs applications. Finalement, une définition formelle est présentée après avoir permis au lecteur de manipuler les représentations de plusieurs groupes.

La première difficulté identifiée par Lajoie était la difficulté à déterminer un ensemble de critères suffisants pour être un groupe. Tel que présenté dans la première section, une piste d'explication pour cette difficulté se trouve à même la forme de la définition de groupe. Faute d'intuition, les étudiants tentent d'appliquer une définition en trois critères, délaissant souvent l'associativité. La séquence de Carter, s'apparentant plus à une introduction progressive, permet aux lecteurs de construire leur schéma de groupe à travers la manipulation d'exemples et les différentes représentations. Ainsi, ils peuvent développer leur intuition et lorsque vient la définition formelle de groupe ils ont déjà la possibilité de lier les différentes composantes de la définition à l'étude réalisée de différentes structures. L'intuition développée par cette séquence pourrait aider à contourner la difficulté des étudiants à établir une liste de critères suffisants pour être un groupe.

Les autres difficultés identifiées par Lajoie pour le concept de groupe sont fortement liées au rôle que jouent les groupes de nombres dans les cours classiques. L'approche des cours classiques repose principalement sur des groupes numériques ou de matrices. À l'opposé, Carter développe le concept de groupe via différents groupes dont plusieurs de transformations géométriques. Choisir d'inclure des groupes de transformations, plus tôt dans la séquence d'introduction, pourrait être suffisant pour contourner ces

difficultés. Cette séquence peut aussi contribuer à rendre l'étude de la théorie des groupes moins artificielle en étant plus proche de la démarche utilisée historiquement pour le développement de ce domaine mathématique.

Lajoie ne s'est pas intéressée au concept de générateur dans sa thèse. Cependant, les différences de position de ce concept dans les séquences d'introduction étudiées valent d'être soulignées. Dans les cours classiques, les générateurs sont abordés après la présentation formelle de groupes, de sous-groupes, d'ordre, de centre, etc. Carter présente l'idée de générateur avant même une définition formelle de groupe. Cette notion est intuitive et son utilisation pour comprendre la structure ou la construction de groupes est intéressante. Carter réutilisera la notion de générateur afin de présenter les diagrammes de Cayley qui joueront un rôle important dans le développement des autres concepts.

On remarque qu'après la définition formelle et quelques exemples de groupes, les cours 1 et 2 poursuivent avec les propriétés de groupes, la définition de sous-groupe, les groupes engendrés et les groupes cycliques. Il est possible de voir cette séquence d'introduction comme la suite logique d'une séquence construite en s'appuyant sur une décomposition pyramidale.

Carter, lui, enchaîne plutôt avec une présentation détaillée de plusieurs familles de groupes en commençant avec les groupes cycliques puis les groupes non abéliens, diédraux, symétriques et alternés. Pour chacune de ces familles, il réalise une étude détaillée en introduisant les concepts qui se présentent de façon naturelle. Par exemple, à travers l'étude des groupes cycliques, il présente la notion d'ordre et d'orbite.

Pour être en mesure de saisir la portée de la méthode d'introduction présentée par Carter, il est essentiel de garder en mémoire l'ordre des concepts abordés par celui-ci. En effet, Lajoie a identifié plusieurs difficultés relatives au concept de sous-groupe dont la difficulté de définir une liste de critères suffisante pour être sous-groupe et la difficulté de comprendre la relation entre l'ordre d'un élément, l'ordre d'un sous-

groupe et l'ordre d'un groupe. Carter présente le concept de sous-groupe via l'idée de groupe cyclique, qui a été déjà travaillée, et à travers les représentations visuelles des groupes qu'offrent les graphes de Cayley. Les représentations utilisées par Carter permettent facilement de mettre en évidence les sous-groupes d'un groupe donné, en ne posant aucune ambiguïté sur la nature de la loi de composition. La recherche de sous-groupes se fait plus naturellement en ayant préalablement développé une compréhension des groupes cycliques et des orbites. Ainsi, des liens entre différents concepts peuvent être plus aisément réalisés. Ainsi, il est facile de supposer que cette séquence pourrait éviter la difficulté des étudiants à identifier une liste de critères pour être un sous-groupe. Les erreurs fréquentes des étudiants relativement à cette structure sont liées à une incertitude de la loi de composition à considérer, ou encore sur la fermeture du sous-groupe.

Sans étudier la séquence pour tous les autres concepts, il est facile de repérer les mêmes stratégies d'introduction. Tant pour les notions de générateur, d'ordre ou d'isomorphisme, Carter inclut une première présentation très tôt dans sa séquence et fait de nombreux liens avec ces concepts avant de les présenter formellement. De plus, il utilise les opportunités d'introduction naturelles que lui permettent les représentations visuelles préalablement présentées, notamment les graphes de Cayley qui seront abordés en détails dans la prochaine section du présent essai.

Il est possible de voir certaines similarités dans les causes des difficultés identifiées par Lajoie. En effet, plusieurs découlent d'un manque d'intuition, comme les difficultés à identifier les critères suffisants pour être un groupe ou un sous-groupe. Elles peuvent découler de liens insuffisants entre les concepts, par exemple les difficultés à voir la relation entre l'ordre d'un groupe, d'un sous-groupe et l'ordre d'un élément ou entre les différents types de groupes. Elles peuvent aussi découler d'un manque de motivation, comme la difficulté à voir une utilité au concept d'isomorphisme ou à donner au terme semblable la définition que lui donnent les experts. Toutes ces sources potentielles de difficultés peuvent être contournées par une séquence d'introduction comme celle de Carter. Cette séquence met l'accent sur les relations entre les concepts, inclut une motivation pour l'étude de cette théorie et laisse place au développement de l'intuition



de l'étudiant. Ainsi, il est possible de conclure que le choix de séquence peut avoir un impact important sur la compréhension globale de l'étudiant et que la séquence développée par Carter pourrait éviter plusieurs difficultés éprouvées par les étudiants suivant un cours classique.

### 4.3 Introduction de la notation

Les cours classiques d'introduction à la théorie des groupes utilisent directement la notation développée pour ce domaine des mathématiques. Par exemple, on parle d'un groupe  $(G, \cdot)$ , une loi quelconque, de l'inverse  $g^{-1}$ , de l'élément neutre  $e$ , etc. et ce, déjà dans la définition de groupe. L'étudiant se familiarise par exposition intensive à cette nouvelle notation. L'essence même de cette notation réside dans son caractère abstrait qui la rend particulièrement flexible. Cependant, l'apprentissage de cette théorie étant déjà de grande envergure, l'ajout de l'apprentissage de la manipulation de la nouvelle notation peut être une difficulté supplémentaire si tôt dans le cours.

Étant donné la non-familiarité des étudiants avec ce concept, la notation abstraite peut rendre l'abstraction du concept de groupe encore plus grande. Tel que mentionné par Hazzan dans la section 3.2, plus l'expérience d'une personne avec un concept est grande, plus elle peut faire des liens avec d'autres concepts et plus celui-ci lui paraît concret. Or, dans un cours classique, aucune expérience ne peut venir en aide aux étudiants. Lorsqu'ils essaient de réduire l'abstraction, ceux-ci vont tenter de se ramener à des concepts connus et donc inévitablement se ramener aux groupes de nombres, ensembles avec lesquels ils sont familiers.

Carter commence la présentation de l'idée de groupe par une discussion dépourvue de la notation associée aux groupes. À travers les sections, il introduit peu à peu certaines notations. Par exemple, après l'introduction des graphes de Cayley, il présente certains groupes avec leur notation associée (voir la figure 5). Le lecteur peut donc ancrer la notation à sa représentation via les graphes de Cayley. Grâce aux tables de multiplication, il utilise la notation sous forme d'équation qui suit naturellement sans poser de défi supplémentaire. Puis finalement, il introduit la notation relative aux in-

verses, à l'élément neutre ou encore reliée à l'associativité en présentant la définition formelle de groupe.

En aucun cas le décalage de l'introduction de la notation a été un obstacle à la séquence d'introduction de concepts utilisée par Carter. L'auteur profite plutôt de la séquence pour l'introduire graduellement : lorsqu'elle s'impose naturellement. L'approche de Carter n'a pas comme objectif de retirer la notation abstraite du cours, sans quoi le concept de groupe serait dénaturé. Toutefois, une fois une notation introduite, il l'utilise lorsque nécessaire dans le restant du livre.

En somme, cette approche contourne le besoin des étudiants de réduire l'abstraction en abordant la notation de façon plus graduelle et en l'appuyant sur des représentations visuelles. Ainsi celle-ci répond à la difficulté identifiée par Hazzan.

22

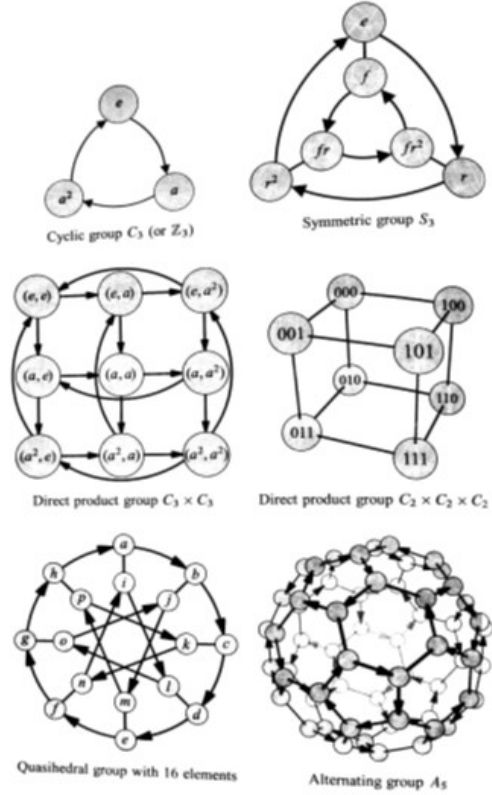


Figure 2.10. Cayley diagrams of some small, finite groups

FIGURE 5 – Analyse comparative de différentes séquences (CARTER, 2009, p.22).

## 5 Analyse d'outils

La présente section vise à présenter de façon plus détaillée certains outils utilisés par Carter dans son livre Visual Group Theory (CARTER, 2009). L'auteur a su identifier différents objets porteurs de plusieurs notions d'algèbre, mais qui sont aussi manipulables et visuels. Dans un premier temps l'utilisation du cube Rubik sera discutée et comparée à celle que d'autres enseignants ont réalisé. Puis, le restant de la section sera consacré aux graphes de Cayley, qui ne sont généralement pas abordé dans les

cours d'introduction à la théorie des groupes classique. Ces diagrammes sont particulièrement versatiles et Carter leur accorde un rôle important dans sa séquence d'introduction. Les critères développés dans la première section constituent la ligne directrice de la présente analyse et sont donc rappelés ci-dessous :

### Grille d'observation

1. Comment l'outil est-il introduit ?
2. Quels sont les applications ou les liens potentiels avec d'autres concepts ?
3. Comment cela répond-il aux difficultés identifiées par Lajoie et Hazzan ?

## 5.1 Cube Rubik

L'utilisation du cube Rubik est intéressante compte tenu qu'une grande majorité des étudiants ont préalablement eu l'occasion de le manipuler. Ainsi, aucune introduction particulière n'est nécessaire. On retrouve d'ailleurs dans la littérature plusieurs professeurs ou chercheurs, notamment Carter (CARTER, 2009), Mulholland (MULHOLLAND, 2011), et Cornock (CORNOCK, 2015), qui se sont intéressés à l'ajout d'une exploration de l'algèbre du cube Rubik dans le contenu du premier cours d'introduction à la théorie des groupes. Développant différentes facettes de l'apprentissage avec le cube Rubik, ils ont permis de réaliser une certaine critique de l'utilisation du cube Rubik.

Les étudiants de Sheffield Hallam University ont suivi un cours pilote dans lequel ce jeu était le protagoniste et a été utilisé tout au long du cours (CORNOCK, 2015). Ceux-ci ont suivi un cours reposant presque uniquement sur le cube Rubik, par une approche le plaçant au cœur de la séquence d'apprentissage. En effet, pour chacun des concepts une première présentation était réalisée via le cube. Cette approche permet aux étudiants de raffermir leur confiance et de développer leur intuition – en plus de donner la possibilité aux étudiants d'apprendre par la découverte, l'apprentissage par la découverte favorisant la motivation des étudiants (BALIM, 2009).

Les étudiants ayant suivi ce cours ont vraiment apprécié cette approche et affirment avoir mieux retenu le contenu du cours. Par contre, cette approche demande beau-

coup de temps et tous les résultats importants de la théorie des groupes n'ont pas nécessairement de belle représentation avec le cube Rubik. Finalement, un des objectifs du premier cours d'introduction à la théorie des groupes est d'amener l'étudiant à manipuler les représentations abstraites de groupes. Cette approche s'éloigne de cet objectif par sa concentration sur le cube Rubik. Les conséquences de cette approche sur les difficultés identifiées par Lajoie ne sont pas évidentes en raison d'un manque d'informations sur les démarches utilisées au sein du cours. Il est toutefois possible de supposer que cette approche peut contribuer à l'identification de critères pour être un groupe ou un sous-groupe en raison de l'étude approfondie qui est réalisée du cube Rubik.

Les démarches utilisées par Mulholland (MULHOLLAND, 2011) et Carter pour l'introduction du concept de groupe sont plutôt semblables. Les approches développées par ces deux professeurs se distinguent dans l'utilisation du cube Rubik dans l'introduction d'autres concepts. En effet, Mulholland garde une place importante au cube Rubik dans ses notes de cours, alors que Carter l'utilise comme premier exemple et le délaisse rapidement pour les diagrammes de Cayley.

Le premier chapitre du livre de Nathan Carter utilise le cube Rubik comme premier exemple dans l'intention d'introduire la structure de groupe. L'auteur réalise une exploration du cube qui donne un premier aperçu de l'étude à faire d'un système pour parvenir à en extraire un groupe. Sans énoncer une définition formelle, il présente plutôt des observations du comportement du cube qu'il généralise ensuite en critères pour être un groupe. Il est important de remarquer que l'auteur aborde les mouvements de base du cube, soit les rotations des 6 faces, et amène le lecteur à considérer ces mouvements comme générateurs de toutes les transformations possibles du cube. Ainsi, plutôt que de tenter d'appliquer une définition formelle aux exemples, cette approche permet aux étudiants de développer leur intuition et de comprendre comment un groupe se comporte en faisant ressortir la structure du groupe de l'exemple. Ils ont la possibilité de se construire une représentation mentale en internalisant les transformations physiques qu'ils appliquent sur le cube Rubik et ainsi construire leur compréhension « objet » du concept de groupe.

La manipulation du cube Rubik est intuitive. Un autre objet aurait pu être utilisé ici, les bénéfices de cette séquence ne reposant pas sur le cube Rubik, mais plutôt sur l'utilisation d'un premier exemple ayant une représentation visuelle et manipulable. Toutefois, le cube Rubik n'est pas commutatif, et montrer son associativité n'est pas évident. Sachant que l'associativité est souvent tenue pour acquise par les étudiants qui développent une trop grande familiarité avec les groupes de nombres, l'utilisation d'un objet n'ayant pas de « belles » propriétés peut être une décision judicieuse. Ce choix d'exemple peut donc contribuer à contourner la première difficulté identifiée par Lajoie en donnant la possibilité aux étudiants de lier le comportement du cube Rubik aux critères nécessaires pour être un groupe en associant le concept à un premier exemple où l'associativité n'est pas implicite, et en permettant aux étudiants de développer l'intuition des étudiants face aux critères pour être un groupe.

De plus, le cube Rubik est un exemple de groupe où les éléments sont des transformations géométriques. La troisième difficulté identifiée par Lajoie est précisément la difficulté à considérer les transformations géométriques comme éléments d'un groupe. Développer la compréhension du concept de groupe à travers le cube Rubik, plutôt que de le représenter avec des groupes de nombres, est un choix judicieux. En réalisant le développement du concept via une étude approfondie du cube, l'étudiant développe une aisance considérable avec ce groupe. Durant leur parcours académique, les étudiants ont beaucoup eu à manipuler les ensembles de nombres, développant ainsi une très grande familiarité de leur comportement. Ainsi, la transition des groupes de transformation vers les groupes de nombres sera facile.

Dans le cadre d'un cours réalisé à l'Université Concordia sur le design de tâches mathématiques, j'ai pu réaliser une petite expérimentation sur l'utilisation du cube Rubik. L'objectif était de comparer deux exemples pour l'introduction au concept de groupe : le cube Rubik et le SWAP. Le SWAP se joue en permutant les chiffres 1 à 5 deux à deux, jusqu'à ce qu'ils retournent dans l'état initial (voir la Figure 6). Il s'agit d'un jeu simple mais suffisant pour présenter le concept de groupe. Après

une introduction d'environ 5 minutes sur la notion de groupe, une feuille avec trois questions a été remise à chaque étudiant dont cinq ont eu à travailler avec le SWAP et les cinq autres avec le cube Rubik. Cette expérimentation est biaisée par sa réalisation sur 10 étudiants gradués intéressés par l'enseignement des mathématiques, malgré tout il est possible de soulever quelques pistes de réflexion.

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
----------	----------	----------	----------	----------

FIGURE 6 – État résolu du SWAP.

Les étudiants qui travaillaient avec le SWAP étaient peu intéressés par leur tâche et portaient beaucoup d'attention sur ceux qui travaillaient avec le cube Rubik et qui étaient vraiment impliqués dans leur tâche. Une explication possible réside dans la composante colorée et captivante du cube Rubik. Impliquer activement les étudiants dans la situation d'apprentissage est chose facile avec ce jeu. Il peut être attrayant pour le professeur d'utiliser le Rubik pour la transition vers l'étude du concept de groupe complètement abstrait. Or, l'analyse des réponses des étudiants lors de cette petite expérimentation fait ressortir la complexité du cube Rubik. Malgré une grande distraction, les étudiants qui ont travaillé avec le SWAP ont réussi à identifier la structure de groupe du jeu, alors que peu des étudiants travaillant avec le Rubik y sont parvenus. Les nombreuses composantes du cube Rubik ont été source de difficultés et les étudiants ont eu du mal à identifier sur quelles composantes porter leur attention.

Les conclusions possibles suite à cette expérimentation sont très limitées étant donné son contexte très particulier. Cependant, le travail réalisé à Concordia et l'étude des notes de cours de Mulholland que j'ai réalisé lors de mon projet de fin d'études me permettent de tirer des conclusions très similaires. En effet, Mulholland utilise le cube comme transition vers un cours plus classique, en introduisant la notation associée à la théorie des groupes rapidement, mais en s'intéressant particulièrement aux résultats d'algèbre pouvant contribuer à la résolution du cube Rubik. Ce faisant il introduit une représentation abstraite du cube Rubik qui demande un travail considérable et dont la manipulation n'est pas évidente.

Ainsi, la complexité du cube Rubik, quoique captivante et engageante, pose plusieurs limites. Pour travailler avec le cube tout le long d'un cours d'algèbre, les étudiants doivent être en mesure de le résoudre assez rapidement. En effet, les observations à partir d'un cube non résolu ne sont pas évidentes, il faut donc constamment se ramener à un état résolu. De plus, un des objectifs du cours est d'amener les étudiants à travailler avec les représentations abstraites de groupes. La représentation abstraite du groupe du cube Rubik telle que développée par Mulholland est très limitante.

Enfin, le coût d'introduction de cet outil est minime et rend le cube Rubik un choix intéressant pour une première introduction au concept de groupe, à condition que son utilisation soit dirigée. Au-delà de cette utilisation, le cube Rubik est une ressource avec beaucoup de limitations à prendre en considération avant de l'inclure dans un cours portant sur la théorie des groupes.

## 5.2 Diagrammes de Cayley

Les diagrammes de Cayley ne font pas partie du contenu d'un cours classique sur la théorie des groupes (CHAPDELAIN, 2014; LEI, 2016; CORTELLA, 2011). Carter, lui, les inclut dès le deuxième chapitre, alors qu'uniquement une idée informelle de groupes a été abordée.

Pour les présenter, l'auteur poursuit l'exploration du cube Rubik débutée au premier chapitre en s'attardant maintenant à ce qui rend sa résolution difficile. En effet, parvenir à identifier la séquence de mouvements pour se rendre à la solution n'est pas facile, car les interactions entre ceux-ci ne sont pas toujours évidentes. De plus, le nombre de configurations du cube Rubik est important ( $4 \times 10^9$ ). Carter aborde l'idée d'une carte qui permettrait de situer où se trouve la configuration d'un cube «non résolu» par rapport à la solution et qui pourrait nous guider en dictant les étapes vers la solution, tel un GPS de voiture.

Dans le cadre de ce jeu, cette carte pourrait prendre la forme d'un dictionnaire : sur chaque page serait représentée la distance en termes de mouvements jusqu'à la solution, ainsi que les conséquences que chaque mouvement possible aurait sur notre configuration. Une page de ce dictionnaire a été créée par Carter et elle est présentée dans la Figure 7. Une telle carte n'est pas envisageable dans le cas du cube Rubik étant donné le nombre de configurations possibles. C'est pourquoi, l'auteur fait la transition avec un deuxième jeu, « le rectangle ». Ce jeu, très simple, consiste à appliquer des réflexions horizontales et verticales à un rectangle dont les coins ont été numérotés jusqu'au retour vers sa configuration initiale.

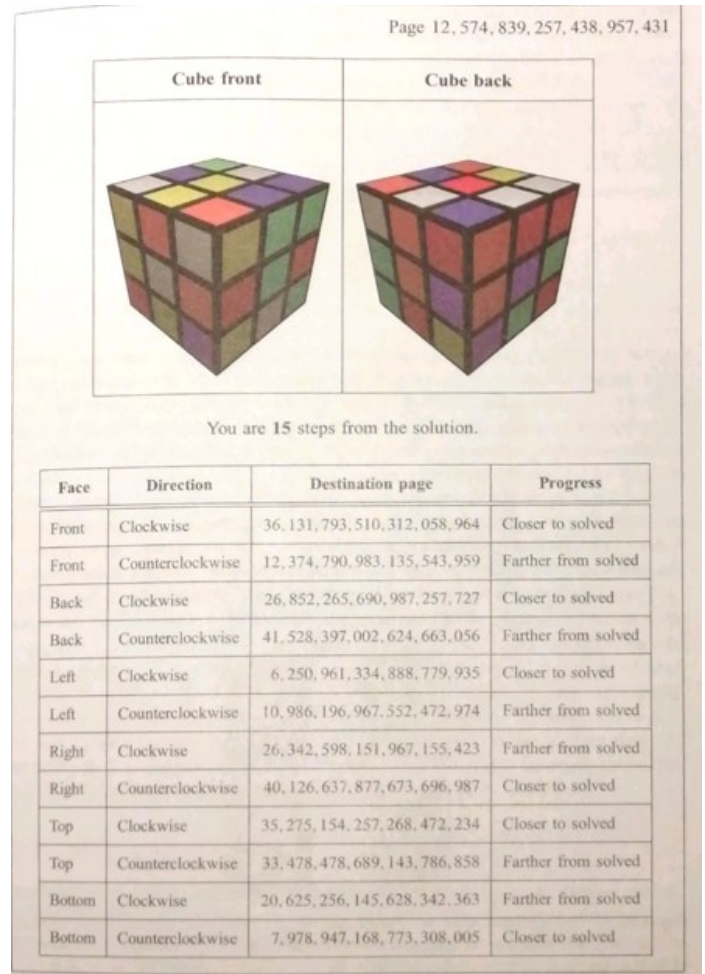


FIGURE 7 – Carte du cube Rubik (CARTER, 2009, p. 13).

Démontrant rapidement que ce nouveau jeu est aussi un groupe, l'auteur explore les différentes configurations afin de tracer une carte du jeu. Ce faisant, il parvient au schéma de gauche de la figure 8 . Celui-ci présente toutes les configurations et tous les chemins possibles entre celles-ci. Avec ces observations, l'auteur définit le schéma de gauche de la figure 8. comme étant un diagramme de Cayley.

Enfin, l'auteur présente un autre exemple avec deux interrupteurs, exemple ayant un diagramme de Cayley dont la structure est la même afin d'amener le lecteur à abstraire l'idée de carte vers un diagramme de Cayley plus général (i.e. graphe de



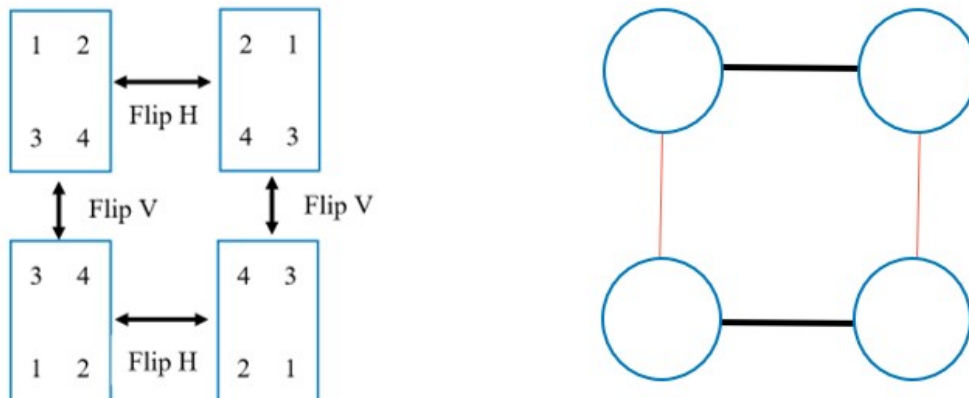


FIGURE 8 – Diagramme de Cayley pour le rectangle et pour  $K_4$ .

Cayley) comme le diagramme de droite de la figure 8. Dans ce diagramme, les configurations du double interrupteur et les deux opérations possibles (changer la position de l'un ou l'autre interrupteur), sont respectivement représentées par les cercles et les traits de différentes couleurs. À travers les exercices de fin de chapitre, l'auteur fait retravailler les contextes des exercices du chapitre 1 en demandant au lecteur de tracer les diagrammes de Cayley pour chacun d'eux.

Le coût d'introduction en termes d'investissement de temps reste très faible, le lien avec l'idée de carte étant vraiment évocateur. La pertinence d'un diagramme de Cayley pour le jeu du rectangle n'est pas claire, cependant l'introduction via le cube Rubik rend l'étude de ces diagrammes beaucoup plus légitime. Le diagramme de Cayley est un outil particulièrement intéressant parce qu'il encode la structure de groupes. Il propose aussi une représentation visuelle qui expose les relations entre les éléments des groupes. Carter utilise ces diagrammes particulièrement versatiles comme outils pour différentes notions, notamment le concept de groupe, de sous-groupe et d'isomorphisme.

### 5.3 Groupe

Le travail réalisé par Carter dans le début du chapitre 2 de Visual Group Theory est porteur de plus qu'une présentation des diagrammes de Cayley. Carter familiarise aussi le lecteur avec la structure de groupe. En algèbre on parle plutôt de graphes de

Cayley que de diagramme. On définit ces graphes de la façon suivante :

Soit  $G$  un groupe et  $S$  une partie génératrice de  $G$ . On construit le graphe de Cayley de  $G$  comme suit :

- À chaque élément  $g_i$  on associe un sommet  $s_i$
- À chaque élément  $s_i$  on associe une couleur  $c_i$
- Il y a une arrête dirigée de couleur  $c_i$  de  $g_1$  vers  $g_2$  si  $g_2 = g_1 * s_i$

Cette définition est hors de portée du lecteur en raison de la terminologie associée aux graphes qui est utilisée ou encore par l'idée de partie génératrice qui est prématurée compte tenu de la séquence de Carter. Choisir de présenter les diagrammes de Cayley peut être justifié par la compréhension que le lecteur doit développer en prévision du rôle que leur accorde l'auteur. De plus, les diagrammes sont plus proches du groupe observé et donc plus concrets, car ils contiennent plus d'informations sur les éléments et sur les actions.

Carter invite le lecteur à se construire un rectangle et à faire les manipulations lui-même. En analysant la démarche réalisée par Carter avec le cadre théorique développé par Dubinsky, on remarque que l'auteur amène le lecteur à internaliser le comportement des transformations externes par des actions sur l'objet rectangle. Ceci permet au lecteur de se créer une représentation mentale de la structure, mais surtout des relations entre les différentes configurations du rectangle. Le lecteur sait que le jeu « rectangle » est un groupe. Ainsi, cette exploration dirigée permet d'apprendre comment les diagrammes de Cayley sont construits et aussi de mieux saisir les relations entre les éléments du groupe.

Par d'autres exemples et surtout en encourageant l'identification de diagrammes de Cayley pour différents groupes dans les exercices de fin de chapitre, le lecteur a l'occasion de manipuler plusieurs diagrammes de Cayley. La familiarité développée avec les diagrammes permet la transition vers les graphes de Cayley, représentation complètement abstraite du groupe. Ainsi, l'objet que manipule le lecteur évolue et passe d'un objet externe : le rectangle, au diagramme de Cayley directement associé au

groupe qu'il représente, puis au graphe de Cayley n'encodant plus que la structure du groupe (voir figure 9).

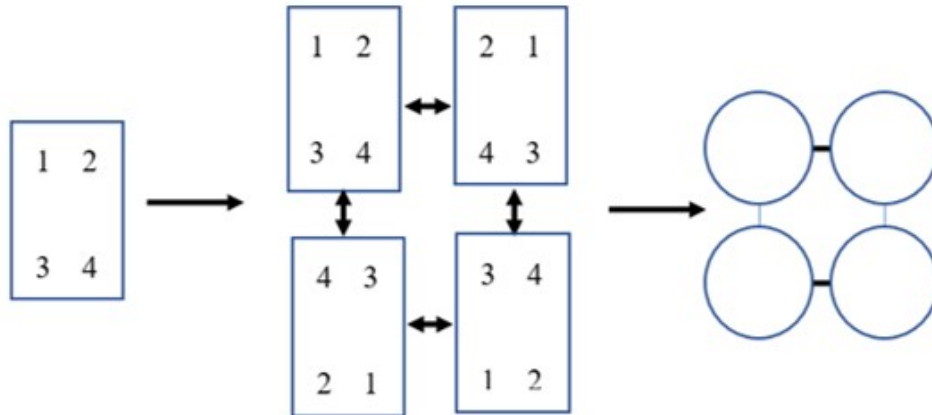


FIGURE 9 – Évolution de la conception objet de l'étudiant.

Sans adresser directement la première difficulté identifiée par Lajoie, soit la difficulté à identifier des critères suffisants pour être un groupe, l'ajout des diagrammes de Cayley à la définition formelle pourrait contribuer à la contourner. En effet, Carter poursuit le développement de la compréhension du concept de groupe en associant une représentation aux composantes essentielles pour être un groupe.

Comme préalablement mentionné, cette représentation met en évidence les relations entre les éléments. Ainsi, cela facilite l'identification de l'élément neutre, même dans le cas de groupes où celui-ci est moins évident, par exemple dans un groupe de classes résiduelles : comme le groupe qui a mené à l'identification de la deuxième difficulté de Lajoie. L'élément neutre de  $(G_3, *)$  où  $G_3 = 2, 4, 6, 8 \subseteq \mathbb{Z}_{10}$  est 6. Considérons le diagramme de Cayley associée à  $G_3$  de la figure 10. Pour ce diagramme, une couleur et un motif de ligne ont été associé à chacun des éléments. Par exemple, l'élément 2 et l'élément 4 ont été respectivement représentés par des tirets gris pâles et des pointillés bleu clair. De la même façon, chacune des 4 opérations possibles dans ce groupe ont été représenté des flèches de mêmes couleurs et motifs que l'élément par lequel on réalise la multiplication. Par exemple, la multiplication par 6 (flèches pleines bleues

foncées) renvoie chaque élément vers lui-même.

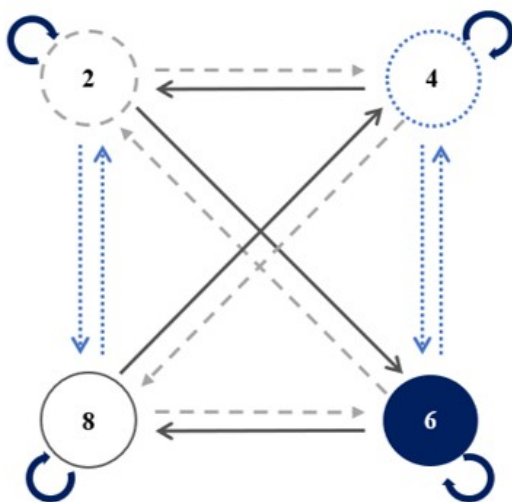


FIGURE 10 – Diagramme de Cayley pour  $G_3$ .

Dans l'étude de Lajoie, plusieurs étudiants ont éprouvé de la difficulté avec ce groupe, car ils s'attendaient à ce que l'élément neutre soit 1 ou 0, étant donné la nature numérique du groupe. Une fois le diagramme de  $G_3$  tracé (voir la figure 10), il est légitime de supposer que les étudiants n'éprouveraient pas la même difficulté, l'effet de l'élément neutre étant très visuel en envoyant l'élément sur lui-même. Ainsi, cette représentation pourrait contourner la deuxième difficulté de Lajoie.

Finalement, les diagrammes de Cayley offrent une représentation qui s'applique à tous les groupes ayant un nombre de générateurs fini, autant les groupes numériques que ceux de transformations. Les dernières difficultés identifiées par Lajoie sont les difficultés à considérer les transformations comme les éléments d'un groupe ou à percevoir des groupes abstraits autrement qu'en termes de groupes numériques. Les représentations visuelles qu'offrent les diagrammes et les graphes de Cayley permettent d'exposer les étudiants à de groupes de différentes natures et ainsi à éviter d'accorder un rôle central aux groupes de nombres.

## 5.4 Sous-groupe

Carter introduit la notion de sous-groupe en utilisant les groupes cycliques et les orbites, ces concepts ayant été abordés préalablement. Carter définit la notion d'orbite comme des groupes cycliques inclus dans le groupe observé. De façon générale, les orbites sont présentées sous la forme d'une liste entre accolade. Ici, l'auteur les utilise comme préambule aux sous-groupes en utilisant le fait qu'ils sont des sous-groupes ayant une structure particulièrement simple et facilement repérable dans les diagrammes de Cayley. Ainsi, une fois rendu à aborder l'idée de sous-groupe, Carter peut réinvestir la structure d'orbite en affaiblissant le critère, les sous-groupes étant des groupes inclus dans le groupe, mais plus nécessairement cyclique. Dans la figure 11, on peut observer d'une part le diagramme de Cayley de  $S_3$ , puis la liste de ses orbites et finalement un réarrangement du diagramme de Cayley de façon à mettre en évidence toutes les orbites du groupe.

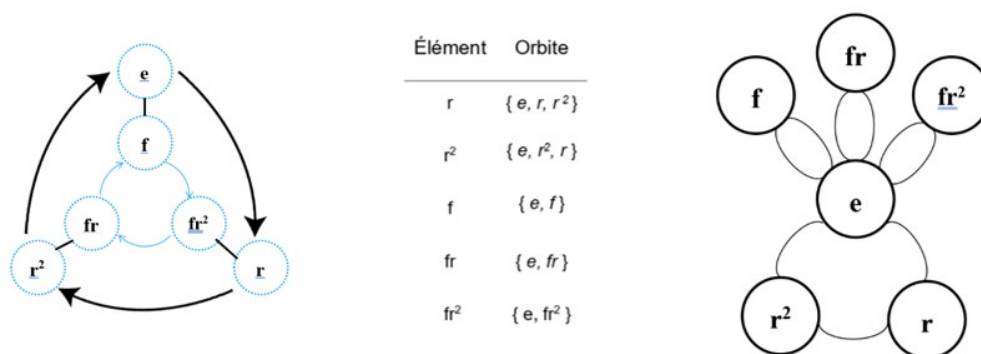


FIGURE 11 – Diagramme de Cayley pour  $S_3$  et ses orbites.

L'introduction via les orbites suggère l'idée de structures emboîtées dans l'esprit des étudiants et l'élargissement du concept d'orbites à celui de sous-groupes se fait naturellement. Ainsi, le coût d'introduction des sous-groupes via les diagrammes de Cayley est minime et implique un autre concept vu en classe, ce qui rend cette approche particulièrement intéressante. Cette représentation permet aux étudiants, une fois encore, d'établir des relations entre les concepts. La représentation visuelle jumelée à la définition contribue certainement à augmenter la rétention des étudiants. De plus, les graphes de Cayley facilitent l'identification de sous-groupes, en permettant de mettre en évidence même les sous-groupes les moins évidents. Dans la figure 10,

certaines sous-groupes ont été volontairement mis de l'avant. Aussi, une réorganisation du graphe de Cayley peut contribuer à voir les sous-groupes d'un groupe donné. Par exemple, dans le cas du groupe  $G = (C_6, +)$ , on peut identifier plusieurs ensembles de générateurs qui peuvent être utilisés pour tracer le graphe de Cayley. Dans la figure 13, on peut observer les différents graphes de Cayley correspondant à l'ensemble de générateurs choisis.

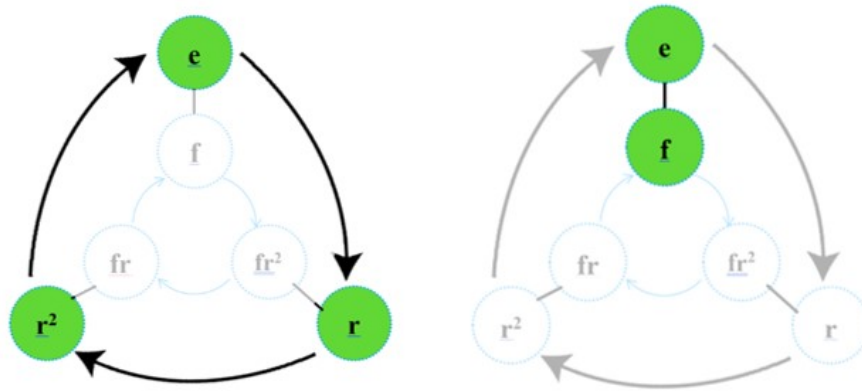


FIGURE 12 – Certains sous-groupes de  $S_3$ .

Relativement au concept de sous-groupe, Lajoie a identifié la difficulté à déterminer un ensemble de critères suffisants pour être un sous-groupe. Cette difficulté s'exprime principalement par la correspondance que les étudiants font entre « ensemble versus sous-ensemble » et « groupe versus sous-groupe ». Les étudiants se concentrent prin-

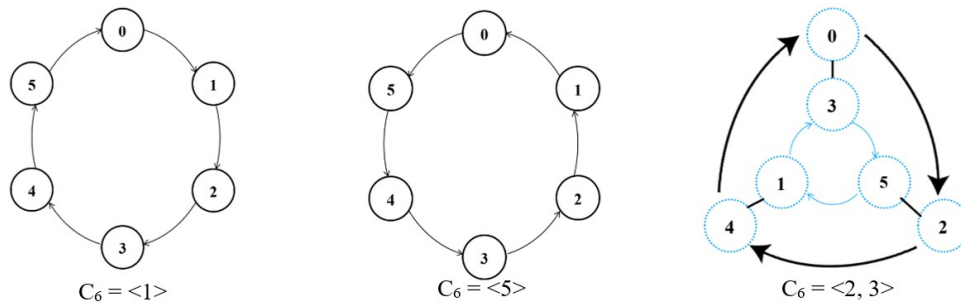


FIGURE 13 – Graphe de  $C_6$  en fonction de différents ensembles de générateurs.

cipalement sur le fait que le sous-groupe est composé d'un sous-ensemble et ne se concentrent pas sur l'effet de la loi de composition sur ce sous-ensemble d'éléments. De plus, le choix de la loi de composition du sous-groupe n'est pas évident pour certains en raison du rôle des ensembles de nombres et de la variété de loi de composition qui peut s'y appliquer.

Les diagrammes de Cayley contournent tout questionnement sur la loi de composition à considérer lors d'une recherche de sous-groupes en imposant la loi du diagramme. L'identification à même le graphe permet aussi de vérifier que le sous-ensemble d'éléments est bien fermé pour l'opération. Ainsi, l'utilisation des diagrammes de Cayley pourrait éviter cette difficulté.

De plus, Lajoie a identifié la difficulté des étudiants à établir une relation entre l'ordre du groupe, l'ordre du sous-groupe et l'ordre d'un élément. On rappelle que l'ordre d'un groupe et d'un sous-groupe est la cardinalité de l'ensemble de leurs éléments, alors que l'ordre d'un élément est plutôt le plus petit entier  $m$ , tel que l'élément composé avec lui-même  $m$ -fois donne l'élément neutre.

Les étudiants ont eu du mal à donner une définition de ces concepts, ou encore à utiliser une procédure adéquate pour déterminer l'ordre d'un élément. L'utilisation du terme « ordre » dans les trois concepts peut être la source de la confusion des étudiants qui n'ont manifestement pas développé leur compréhension de la relation entre ces concepts. En effet, Lajoie précise :

« [...] pour établir cette relation, il faut d'abord voir que l'ordre d'un élément correspond en fait à l'ordre du sous-groupe qu'il engendre [...] »

(LAJOIE, 2000, p.195)

L'ordre du sous-groupe engendré par un élément correspond précisément à la cardinalité de son orbite. L'utilisation de la notion d'orbite comme introduction à celle de sous-groupe a été déjà discutée, mais cette contribution est majeure. En effet, les

notions d'ordres sont préalables au théorème de Lagrange, qui représente un résultat important des cours d'introduction à la théorie des groupes.

Une fois la notion d'orbites présentée, les diagrammes de Cayley offrent une représentation qui met en relation les ordres des différents éléments. Par exemple, en considérant le diagramme de Cayley de la figure 11, il est possible de déterminer l'ordre de chacun des éléments en suivant les flèches, correspondant à l'action d'un élément, de lui-même jusqu'à l'élément neutre (ici l'élément neutre est 6). Ainsi, l'ordre des éléments 2, 4, 6 et 8 sont respectivement 4, 2, 1 et 4. Les diagrammes de Cayley permettent d'identifier l'ordre des éléments visuellement et de les mettre en relation avec l'ordre du groupe et des sous-groupes. La possibilité de manipulation qu'offrent ces diagrammes rend possible le développement de la compréhension des étudiants qui sera essentielle à la présentation du théorème de Lagrange. Bref, la séquence de Carter combinée avec l'utilisation des diagrammes de Cayley contribue certainement à contourner les difficultés identifiées par Lajoie pour le concept de sous-groupes.

## 5.5 Isomorphisme

Au cours de son livre, Carter aborde l'idée d'isomorphisme une dizaine de fois avant d'en introduire la définition formelle au chapitre 8. La première mention de ce concept est réalisée dès le chapitre 2. En effet, son introduction des diagrammes de Cayley est judicieusement choisie et il construit les diagrammes de deux groupes (voir les figures 14 et 15 ci-dessous) et amène le lecteur à considérer les similarités des structures, ces deux groupes faisant partie de la famille de groupe de Klein.

Au cours des différents chapitres, il présente de nombreuses correspondances entre les diagrammes de Cayley, notamment dans le chapitre 3 dont l'objectif est de fournir une motivation de l'étude de l'algèbre. Il y donne d'ailleurs une première définition intuitive du concept d'isomorphisme :



« In other words the Cayley diagrams of both groups have the same shape but with different names on the node and arrows. When two groups have the same structure we say they are isomorphic. »

(CARTER, 2009, p. 35)

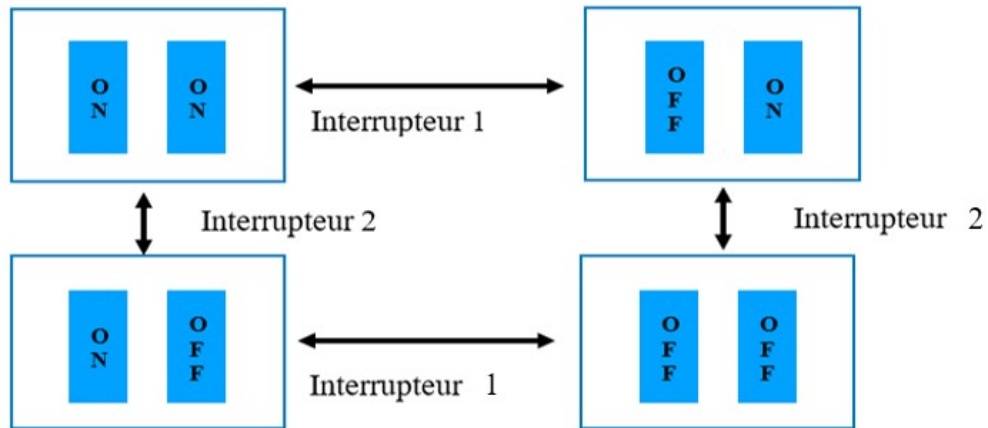


FIGURE 14 – Diagramme de Cayley pour un groupe de deux interrupteurs.

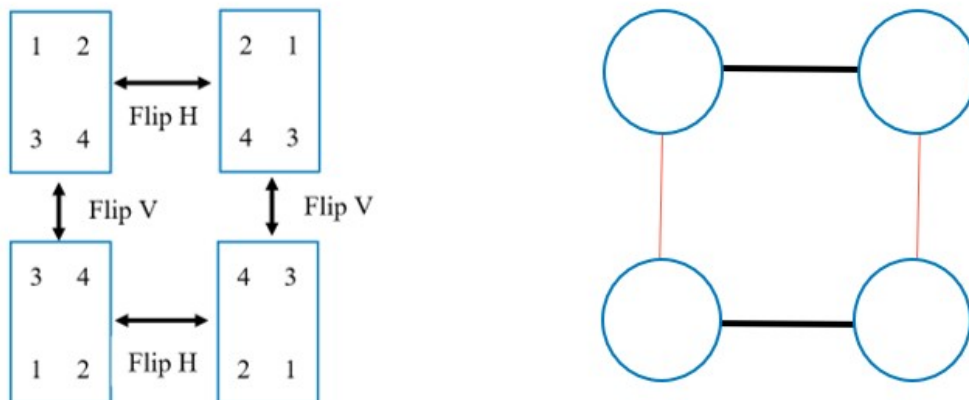


FIGURE 15 – Diagramme de Cayley pour le rectangle et pour  $K_4$ .

Finalement, Carter introduit l'isomorphisme de façon formelle après avoir réalisé une étude détaillée des homomorphismes. Il porte une attention particulière au fait que deux groupes isomorphes peuvent avoir l'air différents d'après l'organisation de leurs graphes de Cayley, mais l'isomorphisme entre les groupes confirme qu'ils ont la même structure. L'utilisation des diagrammes de Cayley pour le développement du concept

d'isomorphisme ne nécessite aucune introduction supplémentaire ; l'étudiant a préalablement pu en développer une compréhension suffisante.

Lajoie a identifié 5 difficultés relatives au concept d'isomorphisme, notamment la difficulté à donner à l'idée « d'être semblable » l'interprétation des experts. Cette difficulté s'exprime par la recherche de similarités externes, par exemple dans la nature des éléments du groupe, choses qu'ils sont en mesure d'observer. Aucune attention n'est portée à la conservation de la structure du groupe. Les graphes de Cayley peuvent contribuer à contourner cette difficulté en donnant la possibilité aux étudiants d'observer d'autres caractéristiques que la nature des éléments. Sans contribuer à l'identification de l'isomorphisme entre les groupes, cette représentation permet aux étudiants de développer leur intuition face au concept. En effet, les diagrammes de Cayley permettent l'observation de similarités structurales donnant ainsi la possibilité aux étudiants de vérifier une caractéristique essentielle du concept. De plus, tout le travail d'introduction de Carter préalable à la définition formelle d'isomorphisme contribue fortement à développer cette intuition et permet aux étudiants d'observer plusieurs paires de groupe isomorphes.

La difficulté à démontrer formellement que deux groupes sont isomorphes a aussi été identifiée par Lajoie. Encore une fois, faute d'intuition les étudiants tentent plutôt de trouver une contradiction et plusieurs abandonnent rapidement. Cette difficulté peut être expliquée par le fait que les étudiants n'ont pas intériorisé la définition d'isomorphisme et ne savent ni comment, ni quand le construire. Les diagrammes de Cayley peuvent contribuer à convaincre l'étudiant de la similarité de structure entre deux groupes et ainsi lui donner une intuition du « quand » construire un isomorphisme. En effet, ils leur permettent de construire une première correspondance visuelle entre les éléments et ainsi de se convaincre que les groupes sont isomorphes avant de tenter d'identifier l'isomorphisme entre les groupes (voir la figure 16).

Finalement, les étudiants ont du mal à reconnaître une utilité à ce concept, même dans le cadre de cours de théorie des groupes. Encore une fois, le fait que la compré-

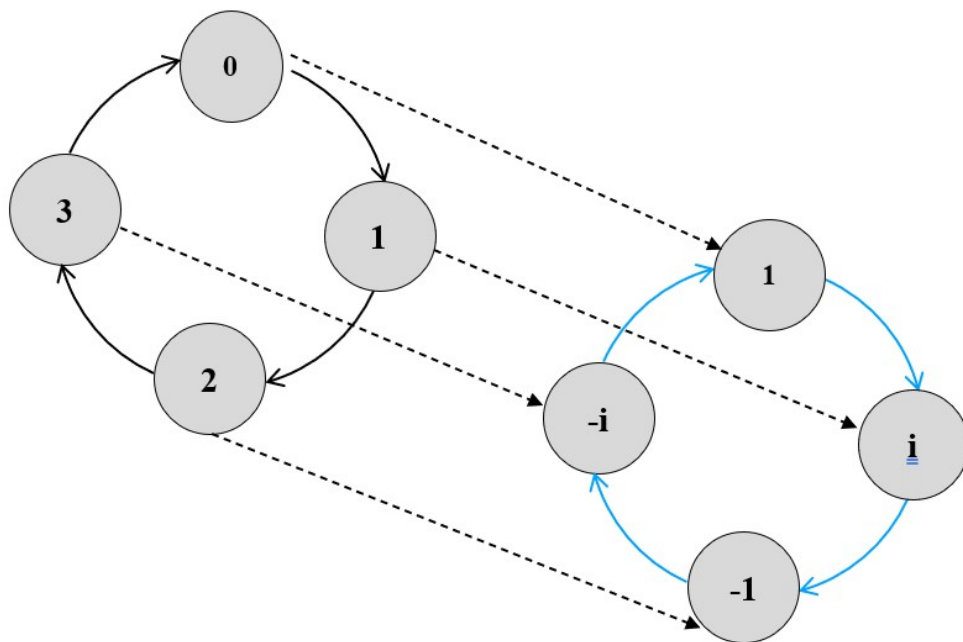


FIGURE 16 – Isomorphisme entre  $C_3$  et un groupe de nombres complexes.

hension est très fragmentaire pour ce concept, mais aussi toutes les autres difficultés éprouvées par les étudiants pour les concepts de groupe et de sous-groupe nuisent à l'identification d'une utilité au concept. Aussi, la compréhension du concept d'isomorphisme des étudiants est encore à un stade processus pour la majorité. Pour reconnaître une utilité pour ce concept, il faut que l'étudiant puisse développer sa compréhension schéma de ce concept. Carter construit le concept d'isomorphisme de façon progressive en insistant sur la similarité des structures plutôt que sur l'identification de l'isomorphisme entre les groupes. Cette stratégie permet le développement d'une compréhension plus générale du concept et contribuerait certainement à permettre aux étudiants d'utiliser l'isomorphisme.

## 5.6 Conclusion

Les diagrammes de Cayley tels que présentés par Carter dans le livre *Visual Group Theory* représentent un outil à coût d'introduction faible. Cet outil est directement lié au contenu du cours d'algèbre, de sorte que son introduction ne demande pas d'investissement de temps supplémentaire important. Les diagrammes de Cayley sont des représentations versatiles que Carter utilise pour l'introduction de plusieurs concepts, notamment les groupes, sous-groupes et isomorphismes tels que présentés dans la section précédente. De façon générale, il est possible de conclure que ces diagrammes pourraient répondre à plusieurs difficultés identifiées par Lajoie.

Quoique centrée sur le livre de Carter, la présente section ne rend pas justice à toute sa richesse, n'abordant que les chapitres 1, 2, 5, 6 et 8. Carter présente aussi les tables de multiplication, qui sont un autre outil de visualisation intéressant pour l'étude de la théorie des groupes. L'auteur utilise cette représentation et les diagrammes de Cayley pour présenter plusieurs autres concepts qui n'ont pas été abordés ici notamment les classes, les produits directs, les groupes quotients, le groupe de Sylow, la théorie de Galois, etc. L'application de ces outils aux concepts énumérés ci-dessous n'a pas été discutée dans le présent essai, mais ces outils offrent des représentations particulièrement « jolies » qui seraient facilement ajoutées au contenu d'un cours classique. Par exemple, la figure 17 est une illustration du théorème fondamental d'homomorphisme présenté avec le groupe  $A_4$ . Ce théorème est souvent l'un des objectifs d'un cours classique. Être en mesure de représenter l'application d'un théorème comme celui-ci pour un isomorphisme donné par un diagramme comme celui de la figure 17 peut être un bon indicateur du niveau de compréhension de l'étudiant. En effet, pour élaborer un tel diagramme, l'étudiant doit avoir développé un niveau de compréhension objet.

Finalement, Carter inclut aussi à la fin de chaque chapitre plusieurs dizaines d'exercices réinvestissant les concepts abordés à l'aide des graphes de Cayley et des tables de multiplication qui permettent aux étudiants d'approfondir leur compréhension et de faire les liens entre les représentations et la notation abstraite de la théorie des groupes.

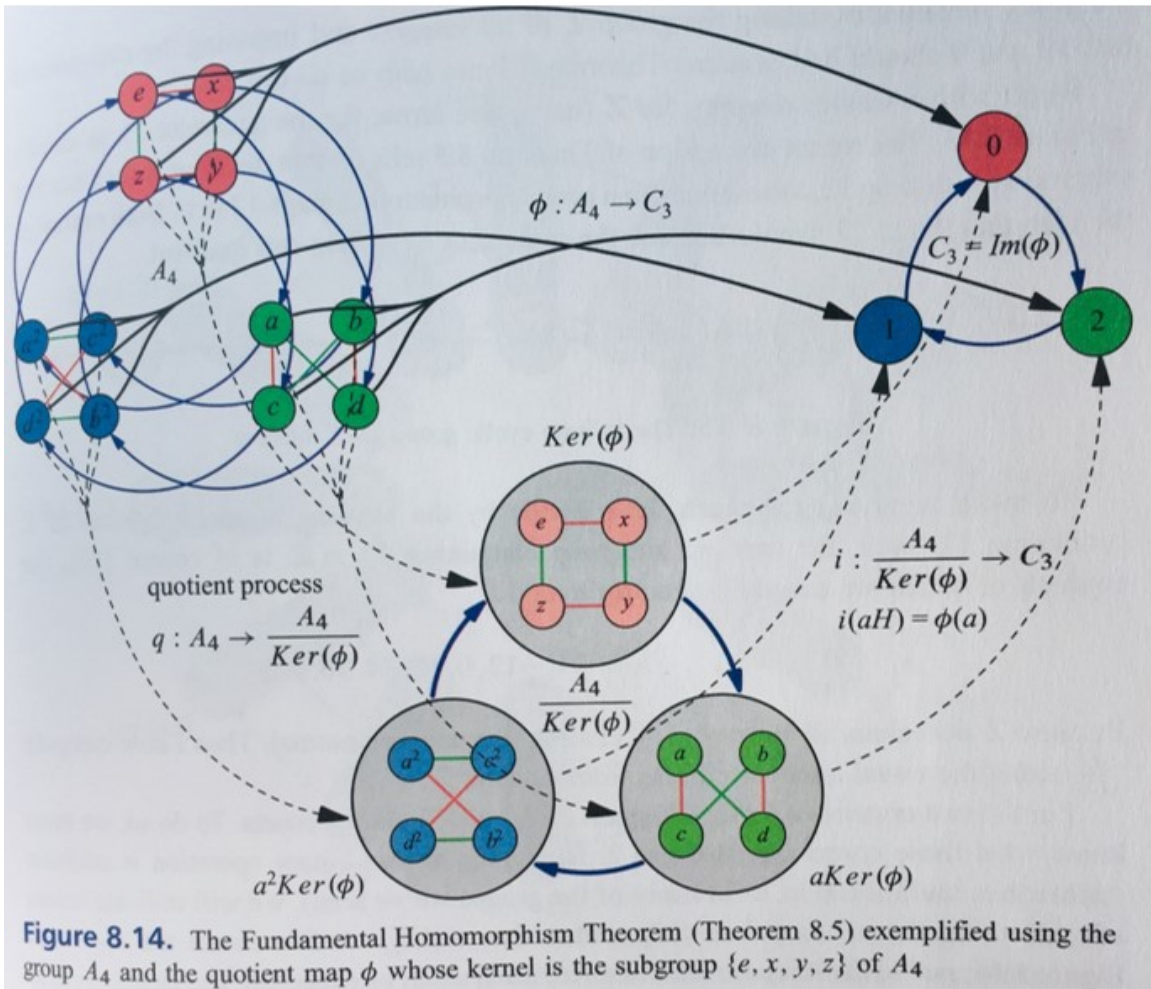


Figure 8.14. The Fundamental Homomorphism Theorem (Theorem 8.5) exemplified using the group  $A_4$  and the quotient map  $\phi$  whose kernel is the subgroup  $\{e, x, y, z\}$  of  $A_4$

FIGURE 17 – Le premier théorème d’homomorphisme présenté avec le groupe  $A_4$  (CARTER, 2009, p. 123)

## 6 Méthodes d’enseignement alternatives pour la théorie des groupes

En plus d’être un défi important pour les étudiants, l’apprentissage de la théorie des groupes est souvent déterminant pour l’attitude que ceux-ci développent envers les mathématiques. En effet, Dubinsky souligne le désintérêt de plusieurs étudiants envers les mathématiques abstraites après avoir suivi un cours en théorie des groupes (DUBINSKY et al., 1994, p. 269). C’est pourquoi plusieurs chercheurs et professeurs ont développé des outils, mais aussi des méthodes d’enseignement alternatives spécia-

lisées pour ce domaine des mathématiques. Sans être l'objectif principal de cet essai, certaines de ces méthodes valent d'être connues afin d'être prises en considération lors d'une éventuelle construction de cours d'introduction à la théorie des groupes. C'est pourquoi la section ci-dessous présente brièvement certaines de ces méthodes.

## 6.1 Étude de symétrie

Robert P. Burn, professeur à Adger College, a élaboré un cours d'introduction à la théorie des groupes en le divisant en deux phases, la première consistant en une étude de la symétrie de différentes structures (Burn, 1998). Le choix de cette séquence d'introduction s'inspire du fait que les théorèmes relatifs à la composition de transformations géométriques et de permutations sont valables sans que les groupes soient explicitement mentionnés dans la discussion. Ainsi, les étudiants ont passé environ 46 heures de cours à étudier la symétrie et à démontrer plusieurs résultats pour différentes structures. Après avoir démontré les mêmes résultats plusieurs fois, pour chacune des structures, l'enseignant a introduit le concept de groupe pour la deuxième partie du cours. À ce moment, les étudiants avaient développé le besoin d'une structure abstraite avec laquelle ils pourraient travailler plutôt que de revenir constamment à un cas précis. Le caractère général des démonstrations réalisées avec le concept de groupe a suscité une grande satisfaction de la part des étudiants. Ceux-ci avaient d'ailleurs une meilleure compréhension de la portée de ces résultats.

Cette approche est comparable à la démarche qui a engendré la théorie des groupes d'un point de vue historique, en ne présentant pas les groupes comme des concepts élémentaires, mais plutôt en présentant la démarche pour se rendre à cette structure. Cette méthode d'enseignement se distingue en étant moins artificielle, en permettant aux étudiants de découvrir le besoin de la structure de groupe.

## 6.2 Approche constructiviste

Leron et Dubinsky ont développé une méthode constructiviste qui pourrait remplacer un cours traditionnel de théorie des groupes. Une présentation de cette approche est réalisée dans l'article *An abstract algebra story* (LERON et DUBINSKY, 1995). Les

chercheurs sont convaincus que la méthode traditionnelle est problématique. En effet, ils affirment que :

« We think that the lecture method is, for most students, quite ineffective. Worse still it makes them feel stupid, alienated. Most students tell us that have very little idea of what the lecture is about, even when it is delivered by a master lecturer.

And if you try, say a year later, to see how much was retained from the course, you'll discover that it is close to nothing. »

(LERON et DUBINSKY, 1995, pp. 230-231)

Ainsi, ceux-ci proposent une méthode où le langage de programmation ISETL est central. Ce langage de programmation, développé par Jacob T. Schwartz (DUBINSKY, 1995) implique une charge de travail supplémentaire pour l'apprentissage d'ISETL, mais son haut niveau le rend accessible. Tout le cours a été donné sous la forme de travaux dirigés en salles informatiques. Ces séances de discussion et de programmation ont permis aux étudiants de se familiariser avec différents concepts. Par exemple, on leur a demandé de programmer différentes fonctions comme la fonction « *is\_group* », retournant oui ou non, selon si l'entrée était un groupe. Par des retours en groupe, le professeur a validé les apprentissages et les démonstrations formelles ont souvent été laissés en devoir aux étudiants.

Cette méthode alternative implique un investissement de temps initial important pour le professeur qui voudrait faire la transition depuis une séquence d'introduction traditionnelle. Cependant, cette approche fait plus que présenter les processus, objets et schémas, elle crée un environnement d'apprentissage qui donne la possibilité aux étudiants de créer leurs propres constructions mentales. Cette approche se démarque en changeant complètement le déroulement des séances de cours. L'implication des étudiants est automatiquement plus grande et les étudiants sont actifs dans leurs apprentissages.

Une analyse comparative entre cette approche constructiviste et une approche traditionnelle a été réalisée dans l'article *Student attitudes toward abstract algebra* (CLARK

et al., 1999). Pour cette étude, 22 étudiants suivant un cours traditionnel et 11 étudiants suivant ce cours expérimental ont été interviewés. La majorité des étudiants ayant suivi le cours expérimental ont une réaction très positive face au cours. Au contraire, les deux tiers des étudiants ayant participé au cours traditionnel ont des commentaires très négatifs envers leur cours. Ceux-ci avouent leur frustration, leur désintérêt et affirment avoir très peu retenu le contenu du cours. La figure 18 reproduit la distribution des notes dans le cours et identifie clairement combien la différence entre les résultats des étudiants de chacun des formats de cours est marquée et cela malgré de la matière et des évaluations équivalentes.

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>F</b>	<b>Total</b>
<b>Cours traditionnel</b>	4	5	9	1	3	22
<b>Cours expérimental</b>	4	5	1	1	0	11

FIGURE 18 – Distribution des notes par type de cours (CLARK et al., 1999, p. 83).

Cette étude contribue à identifier de façon concrète comment les réactions des étudiants face aux deux formats de cours sont polarisées et principalement comment une méthode d’enseignement créée pour engager activement les étudiants dans le développement de leur compréhension rend les étudiants plus prompts à mettre les efforts.

### 6.3 Enseigner avec Group Explorer

*Group Explorer* est un logiciel gratuit développé par Nathan Carter qui a pour objectif d’aider les étudiants à visualiser les groupes et les sous-groupes grâce aux diagrammes de Cayley et aux tables de multiplication. Tous les groupes d’ordre de moins de 40 ont une représentation dans ce logiciel (voir la figure 19).

La contribution de Group Explorer dans un cours d’algèbre a été étudiée dans une analyse comparative réalisée par Claus Schubert et al. (SCHUBERT et al., 2013) Des étudiants volontaires ont suivi un cours d’algèbre pour lequel les devoirs étaient réa-



lisés avec Group Explorer. Les étudiants avaient des questions dirigées et ouvertes à répondre. Par exemple, les étudiants devaient faire une conjecture sur la relation entre l'ordre d'un groupe et l'ordre de ses sous-groupes après avoir analysé différents groupes.

L'article de Schubert ne présente pas le format du cours en classe. Cependant, les résultats de l'étude, qui compare encore une fois ce cours expérimental à un cours plus traditionnel, sont concluants : les étudiants sont unanimes, l'utilisation de Group Explorer leur a été bénéfique. Les commentaires des étudiants ont souligné l'impact que l'utilisation du logiciel a eu sur leur motivation et la contribution de celui-ci sur le développement de leur compréhension de concepts vu préalablement.

Cette méthode d'enseignement n'est pas complètement différente des méthodes généralement utilisées lors de l'enseigne-

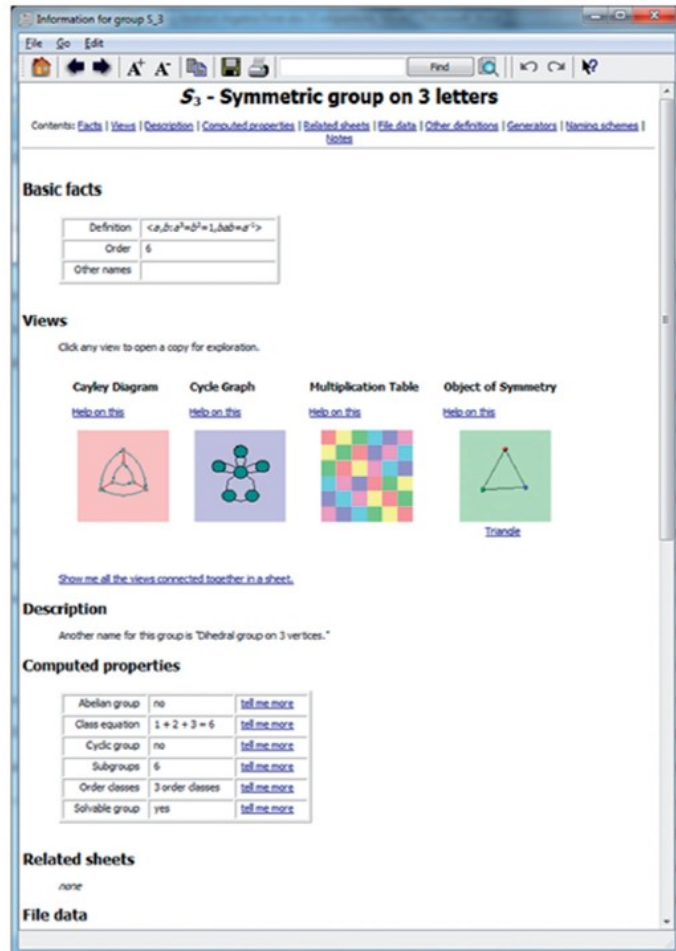


FIGURE 19 – Extrait du logiciel Group Explorer pour le groupe  $S_3$  (SCHUBERT et al., 2013, p. 380).

ment de cours de théorie des groupes. En effet, ajouter des exercices utilisant ce logiciel n'implique pas de changements dans la structure de cours, ce qui rend cette approche intéressante. Les différentes représentations visuelles qu'offrent Group Explorer peuvent certainement aider à rendre la matière plus concrète et fournir des

exemples auxquels les étudiants pourront se ramener à l'avenir, brisant ainsi la barrière que peut représenter le niveau d'abstraction des cours d'algèbre.

## 6.4 Intuition commune : d'opposé de chat aux inverses de groupes

Leron et Ejersbo se sont demandé s'il serait possible d'approcher certains concepts algébriques en n'utilisant que le sens commun, c'est-à-dire l'intuition que chacun pourrait avoir, sans expérience en mathématique (LERON et EJERSBO, 2016). Ils ont développé une série de 4 activités de discussion dirigées menant vers l'idée d'inverse. Pour chacune de celles-ci, le professeur accompagnait les étudiants dans leurs raisonnements. La réalisation des 4 activités a pris environ deux heures.

La première activité débute par une idée générale d'opposés soulignant les objets de la vie courante qui viennent en paires. Ensuite, ils font la transition vers des objets mathématiques, puis des actions du monde réel. Finalement, dans la dernière activité, ils abordent des concepts mathématiques de niveau secondaire telles les fonctions. Un résumé du contenu de chacune des activités est présenté dans l'annexe.

Ces activités sont intéressantes par leur nature ludique et imprévisible pour un cours de mathématique. La première souligne l'idée de paire entre un objet et son inverse. Il s'agit d'une belle opportunité pour présenter la nature symétrique de la relation d'inverse. Aussi, la situation que pose le possible double inverse (chat vs chien ou souris?) permet d'aborder naturellement l'unicité de l'inverse. La deuxième activité permet d'introduire l'élément neutre. Elle permet aussi de définir l'inverse et l'élément neutre en fonction de l'opération. L'activité sur les actions souligne finalement que l'ordre d'une composition d'actions est changé pour l'inverse, comme dans l'exemple des chaussures qui est bien compris par tous. Elle introduit aussi l'idée qu'une action peut être son propre inverse.

Cette approche, quoique abordant principalement la notion d'inverse, peut être une introduction intéressante au concept de groupe. Elle permet aux étudiants de travailler

avec des objets qui leur sont familiers, liant ainsi ces premières notions d’algèbre à des concepts connus. Les étudiants ont besoin d’avoir de nombreuses opportunités de développer leur intuition pour ce nouveau domaine mathématique. En effet, les chercheurs soulignent :

« While many teachers and math educators view intuition (or common sense) as a threat, because it often lead to errors, we believe in contrast that intuition (of the universal recurring kind) is a precious resource, a collection of skills of which all people are experts, and that we should as much as possible ground even sophisticated mathematical concepts in their common-sense precursors. »

(LERON et EJERSBO, 2016, p. 130)

## 6.5 Retour sur les méthodes

Les différentes approches présentées ici agissent toutes sur une composante différente de la compréhension de la théorie des groupes des étudiants, soit en donnant une motivation de la théorie, soit en leur fournissant la possibilité de participer à la construction des concepts ou encore en favorisant leur visualisation et leur intuition. Sans perdre de vue le contenu du cours, l’attention est plutôt portée sur la compréhension des étudiants que sur les résultats.

## 7 Conclusion

Cet essai a été réalisé avec l’objectif d’identifier et de décrire la contribution de différentes ressources pour l’apprentissage de concepts de la théorie des groupes. Une attention particulière a été portée aux ressources ayant une composante visuelle qui pourrait avoir un impact sur la compréhension, mais aussi sur la motivation des étudiants envers ce domaine mathématique.

Dans un premier temps, les travaux de Lajoie, Hazan et Dubinsky ont permis de mieux comprendre certains enjeux relatifs à l’apprentissage de la théorie des groupes. Le survol historique a rappelé les réticences de la communauté mathématique face

à l'abstraction proposée par Cayley et combien la transition vers un haut niveau d'abstraction n'est pas évidente, même pour des mathématiciens matures. Les travaux de Lajoie ont identifié certaines difficultés éprouvées par les étudiants pour les concepts suivants : les groupes, les sous-groupes, l'isomorphisme et les groupes cycliques. L'identification du caractère extrinsèque de certaines difficultés a permis de souligner plusieurs pistes pour les contourner. Ensuite, les travaux d'Hazzan et de Dubinsky ont contribué à mieux cerner les raisonnements des étudiants.

Dans un deuxième temps, l'analyse de la ressource développée par Carter a mis en évidence une séquence d'introduction de concepts très différente de celles communément utilisées en classe. L'ordre de présentation des concepts et les transitions naturelles entre ceux-ci, tels que choisis par Carter semblent être suffisants pour contourner certaines difficultés identifiées par Lajoie. En effet, ce choix de séquence d'introduction a été construit de façon à accorder le temps aux étudiants d'assimiler et de manipuler le concept avant de l'utiliser pour la construction d'un nouveau résultat. Aussi, la contribution des représentations visuelles utilisées par Carter pour introduire et développer les concepts a bien été démontrée, et ce pour plusieurs concepts fondamentaux de la théorie des groupes.

Finalement, des méthodes d'enseignements bien différentes ont été développées afin de révolutionner l'enseignement de l'algèbre abstraite, de façon à impliquer davantage les étudiants dans leurs apprentissages et peut-être changer leurs attitudes envers les mathématiques abstraites.

« The theory of groups is a branch of mathematics in which one does something to something and then compares the results with the result of doing the same thing to something else, or something else to the same thing. »

(NEWMAN, 1956, p. 1534)

Pour être en mesure de bien saisir combien les propos de Newman représentent bien l'idée de la théorie des groupes, il faut avoir préalablement développé notre capacité à manipuler un certain niveau d'abstraction. Cette même abstraction, centrale à la

théorie des groupes, est un obstacle effrayant pour de nombreux d'étudiants.

Pour rejoindre les étudiants et contourner cet obstacle certains pourraient avoir envie de réduire au minimum l'abstraction. Cependant, Dubinsky suggère que plutôt que de tenter de rendre les idées moins abstraites, les enseignants aident les étudiants à gérer l'abstraction : comment la comprendre et l'utiliser (DUBINKSY, 2000, p. 1).

Les outils et ressources présentés dans cet essai n'avaient pas l'objectif de réduire l'abstraction, mais plutôt de l'ancrer dans différentes représentations. Les étudiants peuvent ainsi découvrir les motivations de cette abstraction et développer une certaine autonomie en ayant la possibilité de se ramener aux outils qu'ils ont appris à manipuler en cas de doutes.

Sachant pertinemment l'importance de la charge de travail qu'implique la construction ou la reconstruction d'un cours, certaines suggestions à coût moindre sont présentées ci-dessous. Quoique d'apparence simple, l'impact sur la compréhension des étudiants de chacune de ces suggestions peut être non négligeable.

### **1. Réduire le rôle des groupes numériques.**

Les groupes de nombres, tel  $(\mathbb{Z}, +)$  ou  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  sont généralement ceux avec lesquels les étudiants se familiarisent avec le concept de groupe. Comme Lajoie l'a montré, la prépondérance de ces groupes induit trop souvent les étudiants en erreur. Privilégier la présentation du concept de groupe avec des exemples où les éléments de l'ensemble sont des « actions » ou des transformations géométriques serait idéal. Ce faisant, les étudiants peuvent développer une compréhension plus générale, éviter de tenir pour acquis l'associativité ou encore que l'élément neutre soit 1 ou 0. La transition vers les ensembles numériques n'impliquera pas de difficulté supplémentaire en ayant développé leur compréhension de groupe via les ensembles de transformations.

### **2. Changer l'ordre de présentation de certains concepts.**

Plusieurs changements peuvent être considérés ici, sans engendrer de coût, tous les concepts faisant déjà partie du cursus. Introduire une réflexion sur le concept général de structure algébrique avant la définition formelle de groupe serait particulièrement bénéfique. Aussi, définir les groupes en fonction de leurs générateurs permettrait une introduction très naturelle. Introduire les orbites après les groupes cycliques et avant les sous-groupes (possiblement via les diagrammes de Cayley) permettrait de rendre ces deux concepts plus accessibles. En effet, les orbites sont souvent présentées tardivement, et le concept devient d'apparence complexe. Finalement, inclure du temps pour que les étudiants puissent assimiler les concepts avant de les réutiliser pour la construction de nouveaux résultats est bénéfique. Par exemple, présenter différentes familles de groupes tels les groupes cycliques, diédraux ou de permutations entre la définition de groupe et l'introduction des sous-groupes.

### **3. Donner la possibilité aux étudiants de manipuler et de construire les diagrammes de Cayley.**

L'introduction des diagrammes de Cayley implique un investissement de temps très raisonnable. En incluant la représentation des concepts via ces diagrammes dans la séquence du cours, les étudiants pourront développer plus facilement des liens entre les concepts. Inclure quelques exercices avec ces diagrammes, par exemple les exercices du chapitre 2 de Carter, permettra aux étudiants de développer une familiarité avec cette représentation et les rendront autonomes pour l'utilisation de ces diagrammes.

Les concepts abordés dans cet essai ne touchent que la première partie du cours d'introduction à la théorie des groupes. Ce sont des concepts fondamentaux, qui sont des piliers dans le développement du reste de la théorie, mais aussi dans le développement de la théorie des anneaux, des corps, des modules ou encore de la théorie de Galois. L'utilisation des différents outils et ressources abordés dans le présent essai peut contourner plusieurs difficultés identifiées par Lajoie, contribuant ainsi à améliorer la compréhension générale des étudiants.

Il serait intéressant d'élargir les conclusions de cet essai en considérant la suffisance de celles-ci pour l'amélioration de la compréhension des notions engendrées par les concepts fondamentaux couverts par l'essai. Ainsi, il peut être tentant de supposer que, sans modifications aux méthodes d'enseignement pour la suite des cours d'algèbre, l'intuition, une meilleure visualisation et l'internalisation des concepts contribueront à la compréhension, ainsi qu'au développement d'attitude positive chez les étudiants pour ces cours plus avancés.

## Références

- BALIM, A. G. (2009). The effects of discovery learning on students' success and inquiry learning skills. *Egitim Arastirmalari-Eurasian Journal of Educational Research*, 35, 1-20.
- CARTER, N. (2009). *Visual group theory* (I. MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA, Éd.). Mathematical Association Of America.
- CHAPDELAINE, H. (2014). Notes de cours : Algèbre 1.
- CLARK, J. M., HEMENWAY, C., ST. JOHN, D., TOLIAS, G. & VAKIL, R. (1999). Student attitudes toward toward abstract algebra. *PRIMUS*, 9, 76-96.
- CORNOCK, C. (2015). Teaching group theory using Rubik's cubes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46, pp. 957-967.
- CORTELLA, A. (2011). *Algèbre, théorie des groupes : cours exercices corrigés* (VUIBERT, Éd.). Vuibert.
- DAVIS, T. (1982). Teaching mathematics with Rubik's cube. *The Two-Year College Mathematics Journal*, 13, 178-185.
- DUBINKSY, E. (2000). Mathematical literacy and abstraction in the 21st century. *School Science and Mathematics*, 100, 289-297. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2000.tb17322.x>
- DUBINSKY, E. (1991). Reflexive abstraction in advanced mathematical thinking. Kluwer academics publishers.
- DUBINSKY, E. (1995). Isetl : A programming language for learning mathematics. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 48, 1027-1051.
- DUBINSKY, E., DAUTERMANN, J., LERON, U. & ZAZKIS, R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 267-305.
- HAZZAN, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 40, pp. 71-90.



- HOBBS, J. (1895). Rubik's cube as a teaching Tool for mathematics and science. *School Science and Mathematics*, 85, 367-373.
- LAJOIE, C. (2000). *Difficultés liées aux premiers apprentissages en théorie des groupes* (B. nationale du CANADA, Éd. ; thèse de doct.).
- LEI, A. (2016). Notes de cours : Algèbre 1.
- LERON, U. & DUBINSKY, E. (1995). An abstract algebra story. *The American Mathematical Monthly*, 102, 227-242.
- LERON, U. & EJERSBO, L. R. (2016). What is the opposite of cat ? A gentle introduction to group theory. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47, 120-132.
- LERON, U., HAZZAN, O. & ZAZKIS, R. (1995). Learning group isomorphism : a crossroads of many concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 153-174.
- MULHOLLAND, J. (2011). Permutation puzzles book. Autopublication.
- NEWMAN, J. R. (1956). *The World of Mathematics* (T. 3). Dover Publications.
- SCHUBERT, C., GFELLER, M. & DONOHUE, C. (2013). Using Group Explorer in teaching abstract algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44, 377-387.

## A Annexe

Voici une traduction libre des brefs résumés des activités 1, 2, 3 et 4 (partielle seulement) présentées dans l'article de Leron et Ejersbo (LERON et EJERSBO, 2016).

*Note* : Il a été choisi de traduire le mot "opposite" par opposé.

### Activité 1 : Des objets de tous les jours qui viennent en paires

**Professeur** : Quel est l'opposé de chat ?

**Étudiant** : Chien (sans hésitation).

**P** : Quel est l'opposé de chien ?

**É** : Chat.

**P** : Quel est l'opposé de chaise ?

**É** : Table.

**P** : Quel est l'opposé de long ?

**É** : Court.

**P** : Quel est l'opposé de jour ?

**É** : Nuit.

**P** : Quel est l'opposé de roche ?

**É** : Hésitation, sans réponse.

**P** : Quel est l'opposé de souris ?

**É** : Chat.

**P** : Quel est l'opposé de Chat ?

**É** : Souris... (Oups, ou chien ?)

### Activité 2 : Objets mathématiques

**P** : Quel est l'opposé de 3 ?

**É1** : -3.

**É2** :  $1/3$ .

**P** : Est-ce que 3 peut avoir 2 inverses ?

**É3** : On a vu que chat avait deux inverses : chien et souris.

**P** : C'est vrai. Et pour les nombres ?

**É1, É2 et É3, après discussion** : l'opposé de 3 est -3 si tu penses à « plus » et  $1/3$  si tu penses à « fois ».

**P** : Ok, si on regarde ça d'un autre angle. Quel est l'opposé « d'ajouter 3 » ?

**É1** : Enlever 3.

**P** : Peux-tu expliquer ?

**É1** : Si tu ajoutes 3 et après que tu enlèves 3, c'est comme si tu n'avais rien fait.

**P** : Rien fait ?

**É1** : C'est comme ajouter 0, le nombre reste le même.

**P** : Ok. É2, c'est quoi l'opposé de « multiplier par 3 » ?

**É2** : C'est diviser par 3.

**P** : Pourquoi ?

**É2** : C'est comme É1 a dit : Si tu multiplies par 3 et après divises par 3 tu reviens au même nombre. C'est comme si tu n'avais rien fait.

**P** : Qu'est-ce que tu veux dire par « rien fait » ?

**É2** : C'est la même chose que multiplier par 1. Le nombre reste le même.

### Activité 3 : 3 Actions du monde réel

**P** : Quel est l'opposé de mettre tes chaussures ?

**É** : Enlever tes chaussures.

**P** : Quel est l'opposé de mettre tes chaussettes ?

**É** : Enlever tes chaussettes.

**P** : Ok, regardons l'action combinée « mettre une chaussette et mettre une chaussure ». C'est quoi l'opposé de ça ?

**É** : Enlever une chaussure et une chaussette.

**P** : Qu'est-ce qui s'est passé avec l'ordre des opérations ?

**É** : C'est l'opposé !

**P** : Oui, ce sont les contraires des opérations dans l'ordre inverse.

**P** : Quel est l'opposé de tourner à droite ?

**É** : Tourner à gauche.

**P** : Quel est l'opposé d'avancer de 100 pas ?

**É** : Reculer de 100 pas.

**P** : Quel est l'opposé de l'action combinée d'avancer de 100 pas de tourner à droite et d'avancer de 50 pas ?

**É** : Reculer de 50 pas, tourner à gauche et reculer de 100 pas.

**P** : C'est la même chose que pour les bas et les chaussures : les actions contraires dans l'ordre inverse.

**P** : C'est quoi l'opposé de tourner une pièce de monnaie ?

**É** : (Silence)

**P** : Supposons qu'on a une pièce avec pile en-haut et face en-bas. Qu'est ce qui se passe si on la tourne ?

**É** : On a face en-haut et pile en-bas.

**P** : Comment on retourne avec pile en-haut ?

**É** : On la tourne encore.

**P** : Oui, l'opération « tourner une pièce de monnaie » est son propre inverse.

### Activité 4 : Activité sophistiquée de niveau secondaire

**P** : C'est quoi l'opposé de  $x$  ?

**É1** :  $-x$ .

**É2** :  $1/x$ .

**P** : Pouvez-vous expliquer ?

**É1 et É2** :  $x$  est un nombre, alors c'est la même chose qu'on a fait avec 3. C'est  $-x$  si on pense à l'addition (avec 0 comme élément neutre) et c'est  $1/x$  si on pense à la multiplication (avec 1 comme élément neutre).

**P** : Ok. Continuons. Quel est l'opposé de  $3x$  ?

**É1** :  $-3x$ .

**É2** :  $1/3x$ .

**P** : Pouvez-vous expliquer ?

**É1 et É2** :  $3x$  est aussi un nombre, alors c'est la même chose qu'avec  $x$ .

**P** : Et si on pense à  $3x$  comme la fonction  $f=3x$ . C'est quoi l'opposé de ça ?

**É3** : C'est la fonction  $y = x/3$ .

..