

# Aide-mémoire - Évaluation des compétences pour le CDA

## Équations différentielles du premier ordre

— Équations différentielles à **variables séparables**

$$g(y)y' = f(x); \int g(y) dy = \int f(x) dx + C.$$

— Équations différentielles se ramenant à des équations séparables

— Forme  $y' = f(y/x)$ . Poser  $u(x) = y(x)/x$ .

— Forme  $y' = f(ax + by)$ . Poser  $u(x) = ax + by(x)$ .

— Autres changements de variables.

— Équations différentielles **linéaires**

$$(I) \quad y' + p(x)y = q(x), \quad (H) \quad y' + p(x)y = 0.$$

1. Trouver  $y_1$ , une solution particulière de (H), qui est séparable.

2. La solution générale de (H) est  $y_h = cy_1$ .

3. Trouver  $y_p$ , une solution particulière de (I).

— Méthode des coefficients indéterminés (forme de  $q(x)$ ).

— Méthode de Lagrange (variation de la constante) :  $y_p(x) = u(x)y_1(x)$ .

4. La solution générale de (I) est  $y_g = y_h + y_p$ .

— Équations différentielles se ramenant à des équations linéaires

## Équations différentielles générales du deuxième ordre

— Équations différentielles se ramenant à des équations du premier ordre

— Équations où  $y$  est absente. Poser  $p(x) = y'(x)$ .

— Équations où  $x$  est absente. Poser  $y'(x) = z(y)$  et  $y'' = z \frac{dz}{dy}$ .

## Équations différentielles linéaires d'ordre quelconque à coefficients constants

$$(I) \quad y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_1y' + p_0y = q(x)$$

$$(H) \quad y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_1y' + p_0y = 0$$

1. Trouver  $n$  solutions particulières de (H) qui sont linéairement indépendantes.

a) Essayer la forme  $y = e^{\lambda x}$ .

b) Factoriser le polynôme caractéristique  $p(\lambda)$  ainsi obtenu.

c) Si  $\lambda = \alpha + i\beta$  est une racine de  $p(\lambda)$  de multiplicité  $m$ , on obtient les solutions

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), xe^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{m-1}e^{\alpha x} \cos(\beta x), \\ e^{\alpha x} \sin(\beta x), xe^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{m-1}e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

2. La solution générale de (H) est  $y_h = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$ .

3. Trouver  $y_p$ , une solution particulière de (I).

— Méthode des coefficients indéterminés (forme de  $q(x)$ ).

Si  $q(x)$  est de la forme  $P(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x)$  ou  $P(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ , alors on choisit

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x} (Q(x) \cos(\beta x) + R(x) \sin(\beta x)).$$

—  $P$ ,  $Q$  et  $R$  sont des polynômes de même degré.

—  $P$  peut être simplement une constante et  $\alpha$ ,  $\beta$  peuvent être nuls.

—  $s$  est la multiplicité de  $\alpha + i\beta$  comme racine du polynôme caractéristique  $p(\lambda)$ . ( $s = 0$  si  $\alpha + i\beta$  n'est pas une racine de  $p$ .)

— Si  $q(x)$  est une somme de plusieurs formes, on choisit pour  $y_p$  la somme des formes correspondantes (superposition).

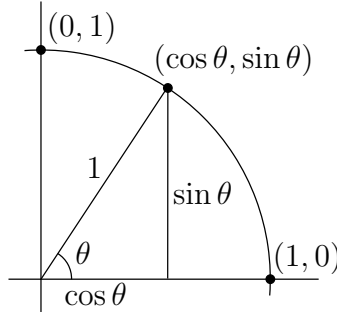
— Méthode de Lagrange (ordre 2) :  $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$ .

4. La solution générale de (I) est  $y_g = y_h + y_p$ .

# Aide-mémoire

## TRIGONOMETRIE

$\theta$	$\cos \theta$	$\sin \theta$
0	1	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/2$	0	1



$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

## CONIQUES CANONIQUES

Paraboles :  $y = ax^2$ ,  $x = ay^2$ .      Ellipses :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .      Hyperboles :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ .

## DÉRIVÉES

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1} \quad \frac{d}{dx} (a^x) = a^x \ln a \quad \frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x \quad \frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad \frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x \quad \frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x} \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad \frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x \quad \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \quad \frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

## INTÉGRALES (Toutes les primitives sont à une constante près)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \quad \int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax)$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x| \quad \int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \quad \int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} \quad \int \tan(ax) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax)|$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x \quad \int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) \quad \int \sec^2(ax) dx = \frac{1}{a} \tan(ax)$$

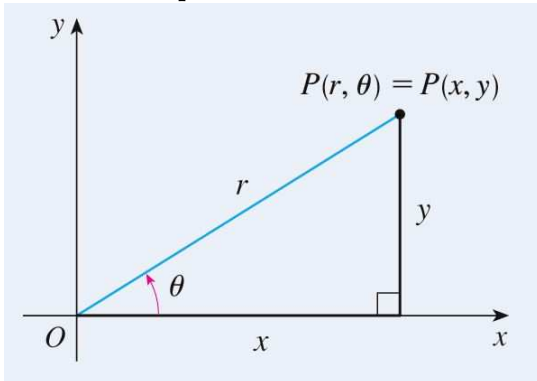
$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| \quad \int \sec(ax) dx = \frac{1}{a} \ln |\sec(ax) + \tan(ax)|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left( x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) \quad \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$$

## Systèmes de coordonnées classiques dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

### Coordonnées polaires



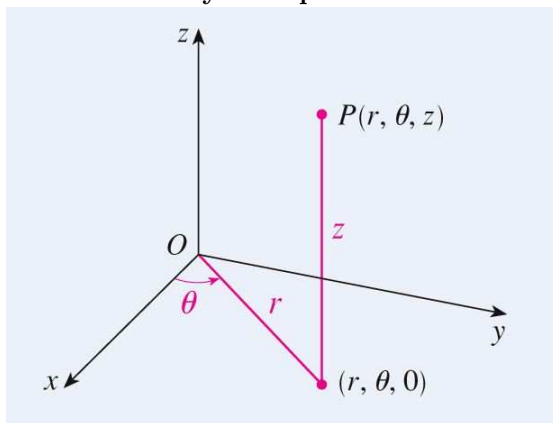
$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

### Coordonnées cylindriques



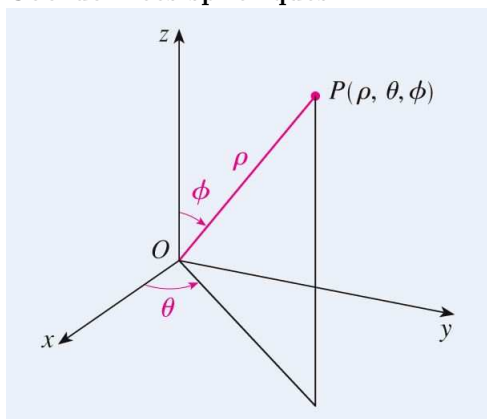
$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \\ = \iiint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta \end{aligned}$$

### Coordonnées sphériques



$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \\ = \iiint_D f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \end{aligned}$$

## Formules relatives aux plaques minces dans $\mathbb{R}^2$

Considérons une plaque mince recouvrant un domaine  $D \subset \mathbb{R}^2$  dans le repère  $Oxy$ , dont la densité au point  $(x, y)$  est donnée par la fonction  $\rho(x, y)$ . Notons  $(\bar{x}, \bar{y})$  son centre de masse, et  $m$  sa masse. On notera aussi  $I_x$  son moment d'inertie par rapport à l'axe des  $x$ , et  $I_y$  celui par rapport à l'axe des  $y$ . Nous avons alors les formules ci-dessous.

$$\begin{aligned}m &= \int \int_D \rho(x, y) dx dy \\ \bar{x} &= \frac{1}{m} \int \int_D x \rho(x, y) dx dy \\ \bar{y} &= \frac{1}{m} \int \int_D y \rho(x, y) dx dy \\ I_x &= \int \int_D y^2 \rho(x, y) dx dy \\ I_y &= \int \int_D x^2 \rho(x, y) dx dy\end{aligned}$$

## Formules relatives aux solides dans $\mathbb{R}^3$

Considérons un solide occupant un domaine  $D \subset \mathbb{R}^3$  dans le repère  $Oxyz$ , dont la densité au point  $(x, y, z)$  est donnée par la fonction  $\rho(x, y, z)$ . Notons  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  son centre de masse, et  $m$  sa masse. On notera aussi  $I_x$  son moment d'inertie par rapport à l'axe des  $x$ ,  $I_y$  celui par rapport à l'axe des  $y$ , et  $I_z$  celui par rapport à l'axe des  $z$ . Nous avons alors les formules ci-dessous.

$$\begin{aligned}m &= \int \int \int_D \rho(x, y, z) dx dy dz \\ \bar{x} &= \frac{1}{m} \int \int \int_D x \rho(x, y, z) dx dy dz \\ \bar{y} &= \frac{1}{m} \int \int \int_D y \rho(x, y, z) dx dy dz \\ \bar{z} &= \frac{1}{m} \int \int \int_D z \rho(x, y, z) dx dy dz \\ I_x &= \int \int \int_D (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz \\ I_y &= \int \int \int_D (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz \\ I_z &= \int \int \int_D (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz\end{aligned}$$

## Changements de variables généraux pour les intégrales doubles

Soit  $T$  la transformation qui envoie un domaine  $\tilde{D}$  (généralement simple à décrire) vers un domaine  $D$ . Si la transformation  $T$  est définie par  $x = g(u, v)$  et  $y = h(u, v)$ , le jacobien de  $T$  est défini par

$$J_T = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} := \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - x_v y_u.$$

Si nous disposons de  $u$  et  $v$  exprimées comme étant des fonctions de  $x$  et  $y$ , il est souvent plus simple de calculer le jacobien en utilisant l'identité

$$J_T = \left( \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}^{-1} = (u_x v_y - u_y v_x)^{-1}.$$

**Théorème :** Sous certaines conditions de continuité, de dérivabilité et d'injectivité, nous avons que

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_{\tilde{D}} f(x(u, v), y(u, v)) |J_T(u, v)| du dv.$$

**Note :** Ce résultat est aussi valide pour les changements de variables pour les intégrales triples. Nous sommes alors amenés à calculer le déterminant d'une matrice  $3 \times 3$  pour connaître le jacobien.

## Courbes dans le plan et l'espace

Soit  $C$  une courbe définie par  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$  avec  $t$  qui varie de  $a$  à  $b$ . Notons  $L$  sa longueur,  $\mu$  sa fonction de densité linéique,  $m$  sa masse, et  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  son centre de masse. Finalement, soient  $I_x, I_y$  et  $I_z$  les moments d'inertie de  $C$  par rapport aux axes  $x, y$  et  $z$  respectivement. Nous avons :

1.  $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$  est le vecteur tangent à  $\vec{r}(t)$  ;
2.  $\vec{s}(t) = \vec{r}(t_0) + t \cdot \vec{r}'(t_0), t \in \mathbb{R}$  est l'équation paramétrique de la droite tangente à la courbe  $\vec{r}(t)$  au point  $\vec{r}(t_0)$  si  $t_0 \in [a, b]$  ;
3.  $L = \int_C ds = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$  ;
4.  $m = \int_C \mu ds = \int_a^b \mu(t) \|\vec{r}'(t)\| dt$  ;
5.  $\bar{x} = \frac{1}{m} \int_a^b x(t) \mu(t) \|\vec{r}'(t)\| dt$ ,  
 $\bar{y} = \frac{1}{m} \int_a^b y(t) \mu(t) \|\vec{r}'(t)\| dt$ ,  
 $\bar{z} = \frac{1}{m} \int_a^b z(t) \mu(t) \|\vec{r}'(t)\| dt$  ;
6.  $I_x = \int_a^b (y(t)^2 + z(t)^2) \mu(t) \|\vec{r}'(t)\| dt$ ,  
 $I_y = \int_a^b (x(t)^2 + z(t)^2) \mu(t) \|\vec{r}'(t)\| dt$ ,  
 $I_z = \int_a^b (x(t)^2 + y(t)^2) \mu(t) \|\vec{r}'(t)\| dt$ .

## Travail d'un champ vectoriel

**Définition :** Soit  $\vec{F}$  un champ vectoriel. Le **travail** de  $\vec{F}$  le long d'une courbe  $C$  paramétrisée par  $\vec{r}(t)$  avec  $t$  qui varie de  $a$  à  $b$  est défini par

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} := \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}'(t) dt.$$

**Note :** Si  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  est un champ vectoriel défini sur  $\mathbb{R}^3$ , le travail de  $\vec{F}$  le long de  $C$  est aussi donné par

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = \int_a^b P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt.$$

## Champs vectoriels conservatifs

**Définitions :** Soit  $\vec{F}$  un champ vectoriel. On dit que  $\vec{F}$  est **conservatif** s'il existe une fonction  $f$  telle que  $\nabla f = \vec{F}$ . On dit alors que  $f$  est une **fonction potentielle** pour le champ  $\vec{F}$ .

**Théorème fondamental des intégrales curvilignes :** Soit  $C$  une courbe définie par  $\vec{r}(t)$  avec  $t$  qui varie de  $a$  à  $b$ , et soit  $f$  une fonction. Alors

$$\int_C \nabla f \bullet d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)).$$

**Définition :** On dit que l'intégrale curviligne d'un champ  $\vec{F}$  sur un domaine  $D$  est **indépendante du chemin** si  $\int_{C_1} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \bullet d\vec{r}$  quels que soient les chemins  $C_1$  et  $C_2$  dans  $D$  ayant les mêmes extrémités.

**Définition :** On dit qu'un ensemble  $E$  est **ouvert**, si on peut entourer chaque point de  $E$  par un disque ou une boule qui est elle-même à l'intérieur de  $E$ .

**Définitions :** Un domaine est **connexe** si on peut relier deux points arbitraires du domaine par un chemin, sans le quitter. On dira qu'il est **simplement connexe** s'il est connexe et qu'il ne comporte pas de trous.

**Théorème :**  $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$  est **indépendante du chemin** dans  $D$  si et seulement si  $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = 0$  pour tout chemin fermé  $C$  dans  $D$ .

**Théorème :** Soit  $\vec{F}$  un champ vectoriel continu sur un domaine ouvert et connexe  $D$ . Si  $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$  est indépendante du chemin dans  $D$ , alors  $\vec{F}$  est conservatif sur  $D$ , c'est-à-dire qu'il existe une fonction  $f$  vérifiant  $\nabla f = \vec{F}$ .

**Théorème :** Soit  $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  un champ vectoriel conservatif sur un domaine  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Alors nous avons que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

**Théorème :** Soit  $\vec{F}$  un champ vectoriel défini sur un domaine simplement connexe  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

sur  $D$ , alors  $\vec{F}$  est conservatif.

**Mat-10364 : Mathématiques de l'ingénieur II**  
**Feuilles résumé 3**

### Intégrales de surface

- Surface  $S$  d'équations paramétriques:  $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} \quad (u, v) \in D_{uv}$

- Élément de surface:  $dA = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv$

- On évalue l'intégrale de surface à l'aide de la formule

$$\iint_S f(x, y, z) dA = \iint_{D_{uv}} f(\vec{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv.$$

- Exemples d'élément de surface

- Sphère de rayon  $R$  et centrée en  $(x_0, y_0, z_0)$ .

$$\begin{cases} x = x_0 + R \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y = y_0 + R \sin(\phi) \sin(\theta) \\ z = z_0 + R \cos(\phi) \end{cases} \quad dA = R^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta.$$

- Cylindre de rayon  $a$  et de hauteur  $H$

$$\begin{cases} x = a \cos(\theta) \\ y = a \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad dA = a \, dz \, d\theta$$

- Cône de sommet  $O$ :  $\alpha > 0$  constant

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = \alpha r \end{cases} \quad dA = r \sqrt{1 + \alpha^2} \, dr \, d\theta$$

- Surface d'équation cartésienne:  $z = f(x, y)$

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{cases} \quad dA = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy$$

- Applications des intégrales de surface

– Aire de la surface  $S$ :  $A(S) = \iint_S dA$ .

– Masse:  $M = \iint_S \delta(x, y, z) dA$  où  $\delta(x, y, z) =$  densité.

- Centre de masse

Moments d'inertie

$$\bar{x} = \frac{\iint_S x \delta dA}{M}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_S y \delta dA}{M}$$

$$\bar{z} = \frac{\iint_S z \delta dA}{M}$$

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \delta dA$$

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \delta dA$$

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \delta dA$$

- Flux d'un champ vectoriel  $\vec{F}$  à travers  $S$ :

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA$$

où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire normal à la surface  $S$ .

- La normale unitaire est fournie par l'expression

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\|}$$

- On a la formule:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \iint_{D_{uv}} \vec{F} \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv.$$

## Divergence et rotationnel d'un champ vectoriel

Soit  $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$  un champ vectoriel défini sur un domaine  $D$ .

- La divergence de  $\vec{F}$ :

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

- Le rotationnel de  $\vec{F}$ :

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \vec{k}$$

- Deux identités importantes:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{\nabla} f = 0.$$



## Théorème de Green

- Orientation positive: un observateur qui se déplace sur la courbe, voit toujours le domaine  $D$  à sa gauche.
- Soit  $D$  un domaine borné du plan  $\mathbb{R}^2$  délimité par la courbe plane **fermée**  $C$  orientée positivement. On a que

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

- Forme vectorielle du théorème de Green

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \text{rot } \vec{F} dA$$

où  $\text{rot } \vec{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ .

- Version divergence du théorème de Green

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_D \text{div } \vec{F} dA$$

où  $\vec{n}$  dénote la normale unitaire dirigée vers l'extérieur du domaine  $D$ .

## Théorème de Gauss

- Soit  $D \subset \mathbb{R}^3$  un domaine borné de l'espace délimité par la surface **fermée**  $S$ . Si  $\vec{F}$  est un champ vectoriel continûment dérivable dans  $D$ , alors

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \iiint_D \text{div } \vec{F} dV$$

où  $\vec{n}$  dénote la normale unitaire pointant vers l'extérieur de  $D$ .

## Théorème de Stokes

- Soit  $S$  une surface orientée et **ouverte** de normale unitaire  $\vec{n}$  dont le bord est une courbe  $C$  **fermée**, orientée de manière positive. Si  $\vec{F}$  est un champ vectoriel continûment dérivable défini dans une région qui contient  $S$ , alors

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dA$$

- Autrement dit, le flux du rotationnel de  $\vec{F}$  à travers  $S$  est égal à la circulation de  $\vec{F}$  le long de la courbe frontière  $C$ .

## Divers

- Equation d'une sphère de centre  $(a, b, c)$  et de rayon  $R$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

- Equation d'un parabolôide circulaire orienté par rapport à  $z$

$$z = a(x^2 + y^2) \quad \text{où } a \text{ est un nombre réel}$$

- Equation d'un cône circulaire orienté par rapport à  $z$

$$z^2 = a(x^2 + y^2) \quad \text{où } a \text{ est un nombre réel}$$

- Coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

- Coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \geq 0 \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta & 0 \leq \theta < 2\pi \\ z = \rho \cos \phi & 0 \leq \phi \leq \pi \end{cases}$$