Questions courantes au CDA
Volet Mathématiques

Ces exercices sont des exemples de questions des cours de Mathématiques de l'ingénieur auxquelles un auxiliaire du CDA pourrait être appelé à répondre. D'autres cours sont aussi supportés par le CDA, comme Introduction à l'algèbre linéaire, Introduction à l'analyse, Mathématiques discrètes, Éléments de mathématiques.

Nombres complexes

1. Trouver le lieu géométrique représenté par $\left|\frac{z}{2z+1}\right| = 1$.

2. Trouver les cinq racines de $p(z) = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$, puis décomposer ce polynôme en facteurs linéaires réels et en facteurs quadratiques réels irréductibles. On rappelle que $z^6 - 1 = (z-1)(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$.

3. Mettre le nombre complexe $\left(3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 3i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^5$ sous la forme $x + iy$.

Équations différentielles

4. Déterminer la solution de $y'' - y' - 6y = -36xe^x$, qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 12$.

5. Une pièce contient 1000 m^3 d'air pur. À partir de l'instant $t = 0$, des fumées toxiques contenant 4% de monoxyde de carbone pénètrent dans la pièce au taux de $0,1$ m^3/min, tandis qu'un mélange homogène d'air et de fumée est évacué au même taux.

a) Si $V(t)$ désigne le volume (mesuré en m^3) de monoxyde au temps t (mesuré en minutes), modéliser la situation par une équation différentielle.

b) Trouver la solution de cette équation correspondant à la condition initiale.

c) À quel instant t le monoxyde de carbone occupera-t-il $0,012\%$ du volume total de la pièce ?

6. Soit $y^2 - 2\ln x = c$, une famille de courbes avec paramètre c. Décrire la famille des trajectoires orthogonales à cette famille de courbes.

Calcul à plusieurs variables

7. Établir l'équation du plan tangent à la surface $z = \frac{x}{x^2+y^2}$ au point $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

8. La résistance équivalente à deux résistances branchées en parallèle est donnée par

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Si $R_1 = 300\,\Omega \pm 5\,\Omega$ et $R_2 = 400\,\Omega \pm 5\,\Omega$, déterminer l'erreur maximale faite sur la mesure de R_e.

9. Supposons que la température en (x, y, z) soit donnée par $T(x, y, z) = 20 + x^2 - y^2 + 2z^2$. Au point $P_0 = (2, 1, 1)$, on prend la direction $\overrightarrow{v}$ suivant laquelle la température diminue le plus (selon le taux instantané). Si l'on se déplace de 3 unités dans la direction du vecteur $\overrightarrow{v}$, à partir de P_0, on arrive au point P_1. Quel est ce point P_1 ?

10. Trouver les valeurs maximale et minimale de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 40$ sur la droite $x + 4y = 1$, en utilisant la méthode de Lagrange.

Courbes, surfaces, volumes

11. Écrire l'intégrale suivante de cinq façons différentes en changeant l'ordre d'intégration :

$$\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy.$$

12. Utiliser les coordonnées sphériques pour calculer le volume du solide au-dessus du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et sous la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

13. Soit C la courbe d'intersection du cylindre parabolique $x^2 = 2y$ et de la surface $3z = xy$. Calculer la longueur de C de l'origine jusqu'au point $(6, 18, 36)$.

14. Trouver le centre de masse de la surface de l'hémisphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, pour $z \geq 0$, sachant que sa densité est constante.

Flux, travail, potentiel, divergence, rotationnel

15. Trouver le flux du champ $\vec{F}(x, y, z) = -x\vec{i} - y\vec{j} + z^3\vec{k}$ à travers la partie du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre les plans $z = 1$ et $z = 3$ (surface orientée vers le bas). En d'autres termes, calculer l'intégrale de surface $\int\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, où S est la partie du cône décrite ci-haut.

16. Calculer l'intégrale curviligne directement et en utilisant le théorème de Green. $\oint_C x^2y^2dx + xydy$, où C est constitué de l'arc de parabole $y = x^2$ allant de l'origine à $(1, 1)$, puis des segments de droite allant de $(1, 1)$ à $(0, 1)$, et de $(0, 1)$ à l'origine.

17. Si le champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = y^2z^3\,\vec{i} + 2xyz^3\,\vec{j} + 3xy^2z^2\,\vec{k}$ est conservatif, trouver une fonction potentielle f telle que $\vec{F} = \nabla f$.

18. Vérifier que le théorème de Stokes est vrai pour le champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = -2yz\,\vec{i} + y\,\vec{j} + 3x\,\vec{k}$ et la surface S, définie par la partie du paraboloïde $z = 5 - x^2 - y^2$ situé au-dessus du plan $z = 1$, orientié vers le haut.

19. Vérifier que le théorème de flux-divergence est vrai pour le champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = x^2\,\vec{i} - y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ sur le cylindre solide $y^2 + z^2 \leq 9$, avec $0 \leq x \leq 2$ (appelé région E).

Réponses

1. Cercle de centre $(-2/3, 0)$ et de rayon $1/3$.

2. Racines : $z_k = e^{ik\pi/3}$, pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$. $p(z) = (z+1)(z^2 - z + 1)(z^2 + z + 1)$

3. $-\frac{243\sqrt{3}}{2} + \frac{243}{2}i$

4. $y(x) = e^{3x} - e^{-2x} + (6x+1)e^x$

5. a) $\frac{dV}{dt} = 0,004 - 0,0001\,V$
b) $V(t) = 40(1 - e^{-0,0001t})$
c) $t \approx 30\,min$

6. $y = ke^{-x^2/2}$, où k est une constante arbitraire

7. $z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1 - \frac{y}{2}$

8. $\Delta R_e \leq \left|\frac{\partial R_e}{\partial R_1}(300, 400)\right| \Delta R_1 + \left|\frac{\partial R_e}{\partial R_2}(300, 400)\right| \Delta R_2 = \frac{125}{49}$

9. $P_1 = P_0 + 3\overrightarrow{v} = (0, 2, -1)$, où $\overrightarrow{v} = \frac{-\nabla T(2,1,1)}{||\nabla T(2,1,1)||} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

10. Min $= f(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) = 37 + \frac{1}{81}$. Max $= f(-\frac{1}{7}, \frac{2}{7}) = 37 + \frac{1}{49}$

11. $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f\,dzdydx = \int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 f\,dxdydz = \int_0^1 \int_0^y \int_y^1 f\,dxdzdy = \int_0^1 \int_z^1 \int_z^x f\,dydxdz = \int_0^1 \int_0^x \int_z^x f\,dydzdx$

12. $V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{cos\phi} \rho^2\, sin\phi\, d\rho d\phi d\theta = \pi/8$

13. $\int_0^6 \sqrt{\left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^2}\, dt = 42$

14. $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = (0, 0, a/2)$

15. $-\int_0^{2\pi} \int_1^3 (r + r^3) r dr\, d\theta = -\frac{1712}{15}\pi$

16. $\int_0^1 (t^6 + 2t^4)dt + \int_0^1 (-1 + 2t - t^2)dt + \int_0^1 0dt = \int_0^1 \int_{x^2}^1 (y - 2x^2y)dydx = \frac{22}{105}$

17. rot$\vec{F} = 0$, le champ est conservatif. $f(x, y, z) = xy^2z^3 + C$.

18. $\vec{r}(t) = (2\sin t, 2\cos t, 1)$. $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (8\sin^2 t + 4\sin t \cos t)dt = 8\pi$
$\int\int_S \text{rot}\vec{F} \cdot d\vec{S} = 8\pi$

19. $\int\int\int_E \text{div}\vec{F}dV = \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \int_0^2 2x\, dxdydz = 36\pi$
$\int\int_{cyl} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \int\int_{D_0} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \int\int_{D_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0 + 0 + 36\pi$